Hommer László

Azok a csodálatos páratlan számok!

Valamikor a 90-es évek elején lehetett; oly rég, hogy személyi számítógép még nem is volt, rendkívül érdekes összefüggést találtam az egész számok hatványai, illetve meghatározott számú páratlan szám összege között. Nevezetesen azt, hogy a természetes számok pozitív egész hatványai felírhatók egymást követő páratlan számok összegeként úgy, hogy az alapból és a hatványkitevőből pontosan megadható a sorozat első eleme, és a sorozat tagjainak darabszáma is. Az összefüggésre a harmadik hatvány számpiramisa vezetett rá. Íme:

$$n^3$$
$$1^3 = 1 = \mathbf{1}$$
$$2^3 = 3 + 5 = \mathbf{8}$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11 = \mathbf{27}$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19 = \mathbf{64}$$
$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = \mathbf{125}$$
$$6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = \mathbf{216}$$
$$7^3 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 = \mathbf{343}$$
$$8^3 = 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 = \mathbf{512}$$
$$\vdots$$

Jól látható, hogy ahol az egyik sorozat befejeződik, ott kezdődik el a másik; ebből adódik, hogy a sorozat első tagja mindig más szám. Ugyanez a sorozat páros hatványok esetében minden esetben 1-gyel fog kezdődni. Tekintsük meg a 2. hatvány számpiramisát, hogy látható legyen a különbség:

$$n^2$$
$$1^2 = 1 = \mathbf{1}$$
$$2^3 = 1 + 3 = \mathbf{4}$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5 = \mathbf{9}$$
$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{16}$$
$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$$
$$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \mathbf{36}$$
$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \mathbf{49}$$
$$8^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \mathbf{64}$$
$$\vdots$$

A két számpiramist vizsgálva szembetűnik, hogy a második hatvány következő eleme mindig a sorozat következő számával nagyobb az előzőnél (pl. $9^2 = 81$, $64 + 17 = 81$, ahol a 17 a következő sorozat utolsó eleme.
Ezek után arra a következtetésre jutottam, hogy kell lennie egy logikus és kiszámítható összefüggésnek a sorozatok elemeit tekintve; illetve arra is, hogy más matematikai törvényszerűség vonatkozik a páros hatványokra, és más a páratlanokra. Megvizsgálva a sorozat szabályait magasabb hatványkitevőkkel is, az alábbi feltételezést fogalmaztam meg:

1. A páros számok esete

Minden n természetes szám x-edik páros hatványa felírható olyan egymást követő páratlan természetes számokból álló sorozat tagjainak összegeként, ahol a sorozat első tagja: $a_1 = 1$ és a sorozat tagjainak száma $n^{x/2}$. Képlettel kifejezve: $n^x = 1 + 3 + ... + a_z$, ahol $z = n^{x/2}$.

2. A páratlan számok esete

Minden n természetes szám y-odik páratlan hatványa felírható olyan egymást követő páratlan természetes számokból álló sorozat tagjainak összegeként, amelyben a sorozat első tagja: $a_1 = n^p - n^q + 1$, ahol $p + q = y$ és $p - q = 1$; a sorozat tagjainak száma pedig $n^{(y-1)/2}$. Képlettel kifejezve: $n^y = a_1 + ... + a_v$, ahol v a sorozat utolsó tagját jelölő szám: $v = n^{(y-1)/2}$.

Megjegyzés: a páratlan számok esetére megadott $a_1 = n^p - n^q + 1$ képlet a páros számokra is alkalmazható, itt viszont figyelembe kell venni, hogy $p = q = x/2$, tehát $a_1 = 1$.

A fenti képletek „működőképességét” igazolandó vizsgáljuk meg az 1, 2, 3 és 4 természetes számok hatványait.

a) Az említett számok **nulladik** hatványa:

Mivel a 0 páros szám, ezért a sorozat első tagja 1. A sorozat tagjainak száma $n^{0/2} = n^0 = 1$, tehát az eredmény mindig 1 lesz. A természetes számok nulladik hatványa valóban mindig 1-gyel egyenlő.

b) Az említett számok **első** hatványa:

Az 1 páratlan szám, ezért a sorozat első tagja az $a_1 = n^p - n^q + 1$ képlettel számítható ki, ahol $p + q = 1$ és $p - q = 1$, tehát $p = 1$ és $q = 0$. A sorozat tagjainak száma: $n^{(1-1)/2} = n^0 = 1$.

Ha $n = 1$, akkor $1^1 = a_1 = 1^1 - 1^0 + 1 =$ **1**.
Ha $n = 2$, akkor $2^1 = a_1 = 2^1 - 2^0 + 1 =$ **2**.
Ha $n = 3$, akkor $3^1 = a_1 = 3^1 - 3^0 + 1 =$ **3**.
Ha $n = 4$, akkor $4^1 = a_1 = 4^1 - 4^0 + 1 =$ **4**.
Érdekesség, hogy eredményként nem sorozatot kapunk, hanem magát az adott természetes számot. Ám ez csak látszólag jelent kivételt, hiszen úgy is fogalmazhatunk, hogy $2^1 = 1 + 1$; $3^1 = 1 + 1 + 1$ stb.
c) Az adott számok **második** hatványa:
A 2 páros szám, tehát $a_1 = 1$, és a sorozat tagjainak száma: $n^{2/2} = n$.
Ha $n = 1$, akkor $1^2 = a_1 =$ **1**.
Ha $n = 2$, akkor $2^2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 =$ **4**.
Ha $n = 3$, akkor $3^2 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 =$ **9**.
Ha $n = 4$, akkor $4^2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 =$ **16**.
Feltételezésünk az 1, 2, 3, 4 hatványalapokra a második hatvány esetében is igaznak bizonyult.
d) Az adott számok **harmadik** hatványa:
$a_1 = n^p - n^q + 1$ képlettel számítható ki, ahol $p + q = 3$ és $p - q = 1$, tehát $p = 2$ és $q = 1$. A sorozat tagjainak száma: $n^{(3-1)/2} = n^1 = n$.
Ha $n = 1$, akkor $1^3 = a_1 =$ **1**.
Ha $n = 2$, akkor $2^3 = a_1 + a_2 = 3 + 5 =$ **8**.
Ha $n = 3$, akkor $3^3 = a_1 + a_2 + a_3 = 7 + 9 + 11 =$ **27**.
Ha $n = 4$, akkor $4^3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13 + 15 + 17 + 19 =$ **64**.
Feltételezésünk az 1, 2, 3, 4 hatványalapokra a harmadik hatvány esetében is igaznak bizonyult.
(H. G. megj.: A szerző hasonló részletességgel vezeti le az adott számok negyedik, ötödik és hatodik hatványát is; ennek részletes ismertetésétől most eltekintünk.)

A fent bemutatott matematikai jelenséget először írógéppel rögzítettem, majd eltettem, és sokáig a fiókom mélyén pihent. Pár évvel ezelőtt, már a fejlettebb számítógépes processzorok idejében megkértem egy kollégát (Kemenes Tamást, a váci Boronkay György Gimnázium matematika—számítástechnika—rajz-szakos tanárát), hogy hozzon létre egy programot, amely a megadott algoritmus szerint számolva nagyobb számok esetén is ellenőrizni tudja a feltevést. Ez 20 számjegy nagyságrendig sikerült is, de klasszikus matematikai bizonyítást nem tudott rá találni. (Én meg sem próbáltam, hiszen nem vagyok matematikus, csak szeretek játszani a számokkal.) Egy amerikai matematikust megkértem, fordítsa le angolra az írásomat, meg is tette, de ő sem tudott matematikai bizonyítással szolgálni hozzá. Adott a kérdés: van egy képlet, amely segítségével a hatványozás sorozat-összeadássá konvertálható. **Lehet-e a matematika egzakt módszereivel bizonyítani igazságát?** Legyen hát ez a feltevés egy kihívás, ami a bizonyíthatóságot, illetve a gyakorlati alkalmazást illeti.