Horváth Géza

Felkészítő feladatok a matematikai tesztelésre – I. rész

Lapunk tavalyi és tavalyelőtti évfolyama is közölt felkészítő matematikafeladatokat. Tisztelt Kollégáimnak azt javaslom, hogy az idei felkészítés során használják ezeket a – korábban megjelent – feladatsorokat is. Idei sorozatunkban hasonló terjedelemben és témakörökben adunk ötleteket a matematikatanároknak. A nehezebb feladatokat ezúttal is *-gal vagy **-gal jelöljük.

Sorozatunk első részében a természetes számok oszthatóságával foglalkozunk. A feladatok megoldása előtt érdemes átismételni a korábban tanultakat: az oszthatóság jeleit (2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 9-cel, 10-zel, 25-tel, 100-zal stb.), de az érdeklődőbbek megismerkedhetnek azokkal a szabályokkal, amelyek alapján gyorsan megállapítható, hogy egy adott szám osztható-e 7-tel, 11-gyel, 12-vel vagy bármilyen összetett számmal. Az oszthatósági feladatok többségében elengedhetetlenül szükség van a számok prímtényezőkre bontására. Rendszerességre, kitartó munkára nevelnek egy adott összetett szám összes osztójának vagy több szám összes közös osztójának megkeresésére vonatkozó feladatok. Sok feladat megoldása könnyebbé válik, ha ismerjük az osztópárok fogalmát. A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös segítségével egyrészt gyakorlati feladatokat oldhatunk meg, másrészt előkészíthetjük a törtműveleteket. Az érdekesebb számelméleti feladatok megoldásához is gyakran elő kell vennünk az oszthatóságot. Érdekes kihívás lehet egy kilencedikes számára megállapítani egy többjegyű számról zsebszámológép segítségével, hogy prímszám-e. (Nem árt tudatosíttatni, hogy ha egy számnak van olyan osztója, amely nagyobb, mint ennek a számnak a négyzetgyöke, akkor van olyan osztója is, amely kisebb a négyzetgyökénél. Ez jelentősen lecsökkentheti az osztók keresésére fordított időt. Ha pl. azt akarjuk megállapítani, hogy prímszám-e a 8147, és nincs prímszámtáblázatunk, akkor vonjunk négyzetgyököt a 8147-ből. Az eredmény 90,26..., tehát ha a 90-nél kisebb prímszámok egyike sem osztója a 8147-nek, akkor fölösleges tovább keresnünk, mert a 90-nél nagyobb számok közt sem találhatunk osztót.)

Feladatok:

1. Írj a * helyére olyan számjegyet, hogy a kapott szám osztható legyen 9-cel! Keresd meg az összes megoldást!
a) 112*5; b) 9090*; c) 9876*; d) 11**13; 1**8.

2. Írj a * helyére olyan számjegyet, hogy a kapott szám osztható legyen 4-gyel! Keresd meg az összes megoldást! Ha nincs megoldás, indokold meg, miért nincs!
a) 564*; b) 11*2; c) 11*4; 1*48; 1*46; 5**4; 5**5.

3. Írj a * helyére olyan számjegyet, hogy a kapott szám osztható legyen 12-vel! Keresd meg az összes megoldást! Ha nincs megoldás, indokold meg, miért nincs!
a) 4489*; 101*4; 55*12; 55*14; 6**22; 75**2; 8010*3.

4. Bontsd fel prímtényezők szorzatára az alábbi számokat:
a) 60; b) 72; 80; 82; 84; 86; 96; 98; 144; 168; 2431; 10800. (Megjegyzés: Módszertanilag nem helyes az ún. soronkénti osztást alkalmazni. Ez a mechanikus módszer ugyan mindig „működik", de egyrészt: olykor túl hosszadalmas, másrészt: nem teszi lehetővé, hogy a tanuló megértse az oszthatóság lényegét. Ennek kifejtésére itt most nincs elegendő helyünk, de tekintsük csak a legutolsó példát! A 10800 soronkénti „lebontásához" a tanulónak 9 sorra van szüksége, ugyanakkor: ha az első lépésben a 10800-at $(108 \cdot 100)$-ra bontja, akkor a következő lépést okosan megválasztva a harmadik sorban megkapja az eredmény.)

5. Keresd meg az alábbi számok összes osztóját!
a) 10; b) 12; c) 18; d) 20; e) 25; f) 30; g) 36; h) 48; i) 49; j) 55; 90; 105; 111; 121; 150.

6*. Keresd meg az alábbi számok összes osztóját!
a) 1200; b) 1355; 3757; 20 449; 105 000.

7. Keresd meg az alábbi számok összes közös osztóját! (Segítség: először keresd meg a számok legnagyobb közös osztóját; ennek osztói lesznek az adott szám közös osztói.)
a) 28 és 40; b) 36 és 54; c) 70, 112 és 126; d) 16 és 25; e) 25, 36 és 49; f) 90, 135 és 180.

8. Azokat a számokat, amelyeknek 1-en kívül nincs más közös osztójuk, *relatív prímeknek* nevezzük. Vannak-e a 7. feladatban relatív prímek?

9. Számítsd ki az alábbi számok legkisebb közös többszörösét!
a) 12 és 18; b) 16 és 40; c) 16 és 56; d) 13 és 26; e) 14, 56 és 70; f) 144, 168 és 216.

10. Az 1-es villamos 10 percenként, a 2-es 12 percenként, a 3-as 15 percenként indul a kiinduló-állomásról. 8^{00} órakor egyszerre indultak. Mikor indulnak legközelebb erről az állomásról ugyanabban az időben?

11. Legfeljebb hány egyforma csokrot tudunk összeállítani 108 szál tulipánból és 90 szál gerberából, ha minden virágot fel kell használnunk?

12*. Ha egy iskola tanulói 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös vagy 6-os oszlopba sorakoznak föl, mindig fölmarad 1 tanuló. Ha 7-es oszlopban sorakoznak föl, akkor nem marad föl senki. Mennyi az iskola létszáma?

13*. Bizonyítsd be, hogy bármely három egymást követő természetes szám a „középső" szám háromszorosával egyenlő!

14*. Bizonyítsd be, hogy ha egy szám 3-mal osztva 2-t ad maradékul, akkor ennek a számnak a négyzete 3-mal osztva 1-et ad maradékul!

15.** Egy 5-re végződő számot így emelünk gyorsan négyzetre: a szám négyzete 25-re végződik, a 25 előtti számcsoportot pedig úgy kapjuk meg, hogy az eredeti szám 5-öse előtt álló számjegyét (számjegycsoportját) megszorozzuk egy 1-gyel nagyobb számmal. Pl.: $75^2 \rightarrow$ a végződés 25, előtte pedig a $7 \cdot 8 = 56$ áll. Tehát $75^2 = 5625$. Vagy $115^2 \rightarrow$ a végződés 25, az előtte álló számjegyek: $11 \cdot 12 = 132$. Tehát $115^2 = 13225$. Bizonyítsd be, hogy ez minden 5-re végződő természetes számra igaz!