Hommer László

Azok a csodálatos páratlan számok!

Tisztelt Kollégák!

A tanév elején kaptam az alábbi írást egy magyarországi, nem matematika-szakos kollégától, amelyben közreadja egy sejtését a természetes számok hatványainak sorozat-összeggé alakításáról. Tudom, az itt leírtak némelyike közismert összefüggés. Például: n darab egymást követő páratlan szám összege az n szám köbével egyenlő. Ezt az ügyesebb tanulók (babszemekkel) szemléletesen is tudják igazolni. Az is köztudott, hogy n darab egymást követő (vagy egymást „azonos ritmusban" követő) természetes szám összege a középső szám n-szeresével egyenlő, és az sem gond, ha n páros, mert ebben az esetben a középső szám „valamennyi egész 5 tized", amelynek párosszám-szorosa biztosan természetes szám. A szerző azonban nem elégszik meg a számok négyzetével és köbével: tovább lép, és általánosan használható képletet talál **minden** hatványkitevőre. Igaz, mindezt csak sejtés szintjén. Ezt ő is érzi, ezért írása végén föltesz egy kérdést, amelyre választ vár. Aki egzakt módon tud és szeretne válaszolni, kérem, juttassa el írását a címemre (Sládkovičova 5, 937 01 Želiezovce vagy e-mailben: horvath.geza@slovanet.sk)!

Horváth Géza

Valamikor a 90-es évek elején lehetett; oly rég, hogy személyi számítógép még nem is volt, rendkívül érdekes összefüggést találtam az egész számok hatványai, illetve meghatározó számú páratlan szám összege között. Nevezetesen azt, hogy a természetes számok pozitív egész hatványai felírhatók egymást követő páratlan számok összegeként úgy, hogy az alapból és a hatványkitevőből pontosan megadható a sorozat első eleme, és a sorozat tagjainak darabszáma is. Az összefüggésre a harmadik hatvány számpiramisa vezetett rá. Íme:

$$n^2$$
$$1^2 = 1 = \mathbf{1}$$
$$2^3 = 1 + 3 = \mathbf{4}$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5 = \mathbf{9}$$
$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{16}$$
$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$$
$$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \mathbf{36}$$
$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \mathbf{49}$$
$$8^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \mathbf{64}$$
$$\vdots$$

Jól látható, hogy ahol az egyik sorozat befejeződik, ott kezdődik el a másik; ebből adódik, hogy a sorozat első tagja mindig más szám. Ugyanez a sorozat páros hatványok esetében minden esetben 1-gyel fog kezdődni. Tekintsük meg a 2. hatvány számpiramisát, hogy látható legyen a különbség:

$$n^3$$
$$1^3 = 1 = \mathbf{1}$$
$$2^3 = 3 + 5 = \mathbf{8}$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11 = \mathbf{27}$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19 = \mathbf{64}$$
$$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = \mathbf{125}$$
$$6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = \mathbf{216}$$
$$7^3 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 = \mathbf{343}$$
$$8^3 = 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71 = \mathbf{512}$$
$$\vdots$$

A két számpiramist vizsgálva szembetűnik, hogy a második hatvány következő eleme mindig a sorozat következő számával nagyobb az előzőnél (pl. $9^2 = 81$, $64 + 17 = 81$, ahol a 17 a következő sorozat utolsó eleme.

Ezek után arra a következtetésre jutottam, hogy kell lennie egy logikus és kiszámítható összefüggésnek a sorozatok elemeit tekintve; illetve arra is, hogy más matematikai törvényszerűség vonatkozik a páros hatványokra, és más a páratlanokra. Megvizsgálva a sorozat szabályait magasabb hatványkitevőkkel is, az alábbi feltételezést fogalmaztam meg:

1. A páros számok esete

Minden n természetes szám x-edik páros hatványa felírható olyan egymást követő páratlan természetes számokból álló sorozat tagjainak összszegeként, ahol a sorozat első tagja: $a_1 = 1$ és a sorozat tagjainak száma $n^{x/2}$. Képlettel kifejezve: $n^x = 1 + 3 + \dots + a_z$, ahol $z = n^{x/2}$.

2. A páratlan számok esete

Minden n természetes szám y-odik páratlan hatványa felírható olyan egymást követő páratlan természetes számokból álló sorozat tagjainak összegeként, amelyben a sorozat első tagja: $a_1 = n^p - n^q + 1$, ahol $p + q = y$ és $p - q = 1$; a sorozat tagjainak száma pedig $n^{(y-1)/2}$. Képlettel kifejezve: $n^y = a_1 + \dots + a_v$, ahol v a sorozat utolsó tagját jelölő szám: $v = n^{(y-1)/2}$.

Megjegyzés: a páratlan számok esetére megadott $a_1 = n^p - n^q + 1$ képlet a páros számokra is alkalmazható, itt viszont figyelembe kell venni, hogy $p = q = x/2$, tehát $a_1 = 1$.

A fenti képletek „működőképességét" igazolandó vizsgáljuk meg az 1, 2, 3 és 4 természetes számok hatványait.

a) Az említett számok **nulladik** hatványa:

Mivel a 0 páros szám, ezért a sorozat első tagja 1. A sorozat tagjainak száma $n^{0/2} = n^0 = 1$, tehát az eredmény mindig 1 lesz. A természetes számok nulladik hatványa valóban mindig 1-gyel egyenlő.

b) Az említett számok **első** hatványa:

Az 1 páratlan szám, ezért a sorozat első tagja az $a_1 = n^p - n^q + 1$ képlettel számítható ki, ahol $p + q = 1$ és $p - q = 1$, tehát $p = 1$ és $q = 0$. A sorozat tagjainak száma: $n^{(1-1)/2} = n^0 = 1$.

Ha $n = 1$, akkor $1^1 = a_1 = 1^1 - 1^0 + 1 = \mathbf{1}$.

Ha $n = 2$, akkor $2^1 = a_1 = 2^1 - 2^0 + 1 = \mathbf{2}$.

Ha $n = 3$, akkor $3^1 = a_1 = 3^1 - 3^0 + 1 = \mathbf{3}$.

Ha $n = 4$, akkor $4^1 = a_1 = 4^1 - 4^0 + 1 = \mathbf{4}$.

Érdekesség, hogy eredményként nem sorozatot kapunk, hanem magát az adott természetes számot. Ám ez csak látszólag jelent kivételt, hiszen úgy is fogalmazhatunk, hogy $2^1 = 1 + 1$; $3^1 = 1 + 1 + 1$ stb.

c) Az adott számok **második** hatványa:

A 2 páros szám, tehát $a_1 = 1$, és a sorozat tagjainak száma: $n^{2/2} = n$.

Ha $n = 1$, akkor $1^2 = a_1 = \mathbf{1}$.

Ha $n = 2$, akkor $2^2 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = \mathbf{4}$.

Ha $n = 3$, akkor $3^2 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = \mathbf{9}$.

Ha $n = 4$, akkor $4^2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{16}$.

Feltételezésünk az 1, 2, 3, 4 hatványalapokra a második hatvány esetében is igaznak bizonyult.
d) Az adott számok **harmadik** hatványa:
$a_1 = n^p - n^q + 1$ képlettel számítható ki, ahol $p + q = 3$ és $p - q = 1$, tehát $p = 2$ és $q = 1$. A sorozat tagjainak száma: $n^{(3-1)/2} = n^1 = n$.
Ha $n = 1$, akkor $1^3 = a_1 = \mathbf{1}$.
Ha $n = 2$, akkor $2^3 = a_1 + a_2 = 3 + 5 = \mathbf{8}$.
Ha $n = 3$, akkor $3^3 = a_1 + a_2 + a_3 = 7 + 9 + 11 = \mathbf{27}$.
Ha $n = 4$, akkor $4^3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 13 + 15 + 17 + 19 = \mathbf{64}$.

Feltételezésünk az 1, 2, 3, 4 hatványalapokra a harmadik hatvány esetében is igaznak bizonyult.

(*H. G. megj.: A szerző hasonló részletességgel vezeti le az adott számok negyedik, ötödik és hatodik hatványát is; ennek részletes ismertetésétől most eltekintünk.*)

A fent bemutatott matematikai jelenséget először írógéppel rögzítettem, majd eltettem, és sokáig a fiókom mélyén pihent. Pár évvel ezelőtt, már a fejlettebb számítógépes processzorok idejében megkértem egy kollégát (Kemenes Tamást, a váci Boronkay György Gimnázium matematika—számítástechnika—rajzszakos tanárát), hogy hozzon létre egy programot, amely a megadott algoritmus szerint számolva nagyobb számok esetén is ellenőrizni tudja a feltevést. Ez 20 számjegy nagyságrendig sikerült is, de klasszikus matematikai bizonyítást nem tudott rá találni. (Én meg sem próbáltam, hiszen nem vagyok matematikus, csak szeretek játszani a számokkal.) Egy amerikai matematikust megkértem, fordítsa le angolra az írásomat, meg is tette, de ő sem tudott matematikai bizonyítással szolgálni hozzá. Adott a kérdés: van egy képlet, amely segítségével a hatványozás sorozat-összeadássá konvertálható. **Lehet-e a matematika egzakt módszereivel bizonyítani igazságát?** Legyen hát ez a feltevés egy kihívás, ami a bizonyíthatóságot, illetve a gyakorlati alkalmazást illeti.

Zolczer Péter

Röviden a „hogyan tanuljunk idegen nyelveket?” kérdésről

Bizonyára mindnyájan kaptunk már olyan reklám e-mailt, melynek feladója már a tárgyban biztosított minket arról, hogy megtalálta a hatékony nyelvtanulás kulcsát, egy olyan módszert, melynek segítségével zavarba ejtően rövid idő alatt, mindenféle különösebb nehézség nélkül tanulhatunk meg bármilyen idegen nyelvet. Ha netán mégsem kaptunk még ilyen e-mailt, az internetet böngészve biztosan találkoztunk már hasonló tartalmú felugró ablakokkal, vagy legalább valamelyik oldalsávban megjelenő, villogó reklámokkal. Olykor még a módszer hatékonyságát igazoló videofelvételhez is találunk hivatkozást, melynek hatására el is gondolkodunk azon, hogy ebben a (csoda)módszerben talán tényleg van valami. Aztán felmerül bennünk a kérdés, hogy ha létezik ilyen módszer, miért nem ezt használják az iskolákban? Miután belátjuk, hogy azért, mert ilyen módszer nincs, szerte is foszlik a frissen kialakult álomképünk, melyben a nyári kiránduláson már a látogatott ország nyelvén beszélünk majd a helyiekkel. De akkor mégis hogyan kezdjünk neki egy idegen nyelv elsajátításához?

A nyelvtanulást talán annak a ténynek a fel- és beismerésével érdemes kezdeni, hogy nem létezik tökéletes módszer. Az idegen nyelv – csakúgy, mint bármilyen más jellegű tudás – nem fog csak úgy a fejünkbe szállni, hiába fizetünk csillagászati összegeket a széles körben reklámozott módszerekért, hiába iratkozunk be ebbe vagy abba a nyelviskolába. Az idegen nyelv elsajátításának sikeressége ma is ugyanazoktól a tényezőktől függ, mint tegnap függött, és amelyektől holnap is függni fog. Motiváció, cél, belefektetett idő és energia, képességeink és adottságaink, akaraterő és önbizalom, a lehetőség, hogy körülvegyük magunkat az idegen nyelvvel… a lista nagyon hosszú. Nincs tehát fekete-fehér válasz arra a kérdésre, hogy a számtalan módszer közül melyik a legjobb? Dehogynem: az, amelyik *számunkra* hasznos, amelyik segítségével *valóban* megtanuljuk az áhított idegen nyelvet. Azt viszont ne várjuk, hogy egy online kérdőív kitöltése után a módszer neve villogó betűkkel megjelenik a képernyőn. Ha tényleg komolyan gondoljuk a nyelvtanulást, első lépésként érdemes alaposan áttekintenünk a nyelvtanulás módszereinek széles spektrumát. Fontos, hogy próbáljuk meg kizárni előítéleteinket egy-egy adott módszert illetően, ugyanis nagy a valószínűsége, hogy a több módszer technikáiból saját magunk által „összegyúrt” módszer lesz számunkra a leghatékonyabb.

Ami a nyelvtanulással kapcsolatos gyakori kifogásokat illeti:

- Idegen nyelveket gyerekkorban kell tanulni, minél öregebbek vagyunk, annál nehezebben megy a nyelvtanulás – rengeteg kutatás és tanulmány kimutatta, hogy ez a megállapítás nem több mint tévhit.
- Nincs meg a genetikai adottságom – szintén tévhit.
- Rossz a memóriám a sok új szóhoz – a memória fejleszthető, továbbá több, ingyenesen elérhető alkalmazás létezik, melyek segítségével szórakozva bővíthetjük a szókincsünket (pl. www.memrise.com)
- Nem tudok külföldre utazni – szintén tévhit, hogy az idegen nyelv egyetlen, vagy legalábbis leghatékonyabb elsajátításának módja az, ha az adott nyelvet beszélő országba költözünk.
- Félek hibásan beszélni – megjegyezhetnénk, hogy nem létezik nyelvtanulás hibás beszéd nélkül, de egyszerűbb, ha ebben az esetben feltesszük magunknak a kérdést: akarok én egyáltalán idegen nyelvet tanulni? Ha válaszunk igen, valószínűleg gyorsan jön majd a felismerés, hogy a hibáktól való félelem nem lehet kifogás.

A nyelvtanuláshoz tehát egyszerű kérdések feltevésével álljunk hozzá: miért és mi célból akarok nyelvet tanulni?, a lehetőségeimet akarom szélesíteni, esetleg ismerkedni idegen kultúrákkal?, mennyi időt és energiát tudok nyelvtanulásra szánni?, milyen stílusban szeretek tanulni?, szeretek nyelvtanozni?, vagy inkább a nyelvvel való gyakori érintkezésből szeretek mintákat megjegyezni?, szeretem a szólistákat?, vagy inkább a kontextusból szeretem megismerni a szavak jelentését?, könyvet olvasni vagy filmet nézni lenne számomra szórakoztatóbb az idegen nyelven?, autodidakta módon szeretek tanulni a saját tempómban, vagy inkább csoportosan, ahol a tagok és a kiadott feladatok (is) motiválnak? Az alapvető kérdések megválaszolásánál fontos, hogy ne ragaszkodjunk abszolutista módon válaszainkhoz. A nyelvtanulás módszere egyénre szabva sincs kőbe vésve. Ahogy fejlődünk és változunk, úgy fejlődnek a képességeink is, és ezekhez mérten változhatnak a fenti kérdésekre adott válaszaink is. Ha mindenképp tanácsot kellene adnom nyelvtanulás terén, talán a következőt javasolnám: tájékozódjunk, legyünk nyitottak és alakítsuk ki egyéni módszerünk.