HORVÁTH GÉZA

MIKOR SZABAD ÉS MIKOR TILOS KÍSÉRLETEZNI (PRÓBÁLKOZNI) EGY MATEMATIKAI PROBLÉMA MEGOLDÁSA SORÁN?

Nem először teszem föl a kérdést: mi lehet a valódi oka annak, hogy sok jó képességű gyerek nem szereti a matematikát? Azt, hogy „nem szereti", sokan sokféleképpen öntik szavakba. A szülők leggyakrabban úgy, hogy „nem érti", maguk a gyerekek úgy, hogy „félnek tőle", vagy úgy, hogy „nem érdekli őket". Sommásnak tűnhet a véleményem, hogy egyetlen olyan gyerek sem fogja szeretni, akinek nem tesszük lehetővé, hogy *maga fedezze föl* a matematika szépségeit. Tudom, a tanterv sem hagy erre elég időt erre. Meg aztán a türelmünk is véges. Ezért aztán inkább készen tálalunk mindent. Így a legérdekesebb összefüggések is megjegyzendő (bemagolandó) tételekké, képletekké degradálódhatnak. Pedig amit meg **kell** jegyeznünk, az kevésbé vonzó, mint amire magunktól jö**het**ünk rá.

A reálisan gondolkodó pedagógus kénytelen egy középutat választani: hagyja, hogy a legügyesebbek (legkreatívabbak) némi irányítás mellett, de mégiscsak önállóan építsék fel a matematika fogalomrendszerét, hogy maguktól csodálkozzanak rá az összefüggésekre. A „nehezebben mozdulók" pedig kénytelenek mindent (vagy legalább a legszükségesebbeket) megtanulni – a szó köznapi értelmében véve.

Igazán „autentikus" magyarázatot akkor kaptam a matematika szeretetének kérdésére, amikor alkalmam volt szóba elegyedni egykori versenyzőkkel, akik nagy lelkesedéssel beszéltek tanáraikról, a szakkörökről és leginkább a fejtörésre fordított hosszú-hosszú órákról. A legtanulságosabb az volt, amikor arról is hajlandók voltak beszélni, hogy *mit nem szerettek*. Egyikük egyszer így vallott: *„Nem sokon múlott, hogy megutáljam a matekot. Mert amikor megmondták, hogy ezt **így kell** megoldani, és hogy ezt **így kell leírni**, akkor úgy éreztem: rám itt már nincs szükség. Én már csak egy rabszolga vagyok, akinek vakon teljesítenie kell a parancsot."*

Matematikaversenyeken is tapasztaltam: sok tanár alacsonyabb rendűnek, szakszerűtlennek tartja, ha egy tanuló *kísérletezéssel, találgatással* oldja meg a feladatot, holott ő (a szaktanár) már csak tudja, hogy itt a „legfrappánsabb" módon: (mondjuk) egyenlettel kellene dolgozni. Ugyanakkor maga is gyakran hangsúlyozza, hogy milyen fontos lenne a matematika „életszerű" megközelítése. Nézzünk egy példát:

1. FELADAT:

A gyerekek egy tornateremben kört alkotva állnak fel. Mindegyikük kap egy sorszámot, szépen sorban haladva: az első 1-est, a mellette álló 2-est, a következő 3-ast stb. A 4-es sorszámúval szemben áll a 12-es sorszámú. Hányan állnak a körben?

A tanár megoldása:

$12 - 4 = 8$, tehát a 4-es sorszámútól a 11-es sorszámúig 8-an állnak. Ez az összes tanuló fele, tehát a körben $8 \cdot 2 = 16$-an állnak. *„Jegyezd meg, ezeket a feladatokat **így kell** megoldani!"* (A kreatív tanuló elkezd kételkedni. Miért kell ezt megjegyeznem?! Miért épp a 11-es sorszámúig kell megszámolnom a gyerekeket, miért nem a 12-esig? A 4-est és 12-est összekötő szakasz ennek a körnek az átmérője. Biztos, hogy a 8-at kell megszorozni kettővel? Stb. A készen kapott módszer lehet, hogy jó, de ezt a jobbak szeretnék igazolni, vagy legalább szemléltetni.

A tanuló megoldása:

Ha a 4-essel szemben a 12-es áll, akkor az 5-össel szemben a 13-as, a 6-ossal szemben a 14-es, ..., a 8-assal szemben a 16-os, a 9-essel szemben az 1-es. Tehát az 1-es szomszédja a 16-os, vagyis 16 tanuló áll a körben. A próbálgatás közben valószínűleg arra is rájön, hogy a szembenállók sorszáma közt mindig 8 a különbség. De ha ez így van, akkor csak azt kell megnézni, hogy ki áll az 1-essel szemben. Ez az 1 + 8 = 9-es tanuló. Ha a 9-es szomszédja a 8-as, akkor az 1-esé a 8 + 8 = 16-os.

Sok tanár azért tör pálcát a kísérletezés, próbálgatás fölött, mert így csak kis számokat (véges idő alatt kipróbálható mennyiségeket) tartalmazó problémákat lehet megoldani. Fölmerül a gyanú: akkor is meg tudná oldani a fenti feladatot a tanuló, ha a 214-essel a 2018-as állna szemben? Az első válasz az, hogy: nem. Ám az ügyesebb gyerekek gyorsan rájönnek, hogy a problémát érdemes először egyszerűbb számokkal kipróbálni: hátha közben kiderül egy összefüggés, amellyel már a „nagy számos" feladatok is „megadják magukat".

Sok olyan feladat van, amelyet a matematikatanárok nagy többsége csakis egyenlettel hajlandó megoldani. Még akkor is, amikor egy ötödikesnek címezték:

2. FELADAT:

Az apa 25 évvel idősebb, mint a fia. 3 év múlva épp 6-szor olyan idős lesz, mint a fia. Hány éves most az apa?

A tanár megoldása:

A fiú most x éves, az apa $x + 25$ éves. 3 év múlva a fiú $x + 3$, az apa $x + 25 + 3 = x + 28$ éves lesz. Ebből az egyenlet:

$6 \cdot (x + 3) = x + 28$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy a fiú most 2 éves, az apja pedig 27. Ellenőrzés: az apa 3 év múlva 30, a fia pedig 5 éves lesz. Az apa életkora akkor valóban 6-szor annyi lesz, mint a fiúé. (Szabatos, „betanítható" megoldás, sok tanár szerint ez a frappáns és elegáns. Nyolcadikban. Esetleg! De hogy oldaná meg egy ötödikes?)

A tanuló megoldása:

Rengeteg közhely hangzik el a függvényszerű gondolkodásról, ám ezt sokan úgy értelmezik félre, hogy a függvények elméletét kellene a tanulókkal elsajátíttatniuk. Holott ez a feladat az *összefüggésekben gondolkodáshoz* szinte „kínálja magát". Csak meg kell engednünk a gyerekeknek, hogy kísérletezzenek, próbálkozzanak. Mondjuk, egy táblázat segítségével. (Vagy bárhogy máshogy, ami a tanulónak természetes.)

APA	25	26	27	28	29	**30**
FIA	0	1	2	3	4	**5**

APA	31	32	33	34	35
FIA	6	7	8	9	10

Ha szerencsénk van, akkor a táblázat valamelyik oszlopában megjelenik a keresett számpár. Ha nem, akkor meg úgysincs megoldása a feladatnak. (Egy ötödikes számára ez egyben azt is jelentené, hogy *nincs értelme* a feladatnak.) Nem véletlenül emeltem ki az imént a *„meg kell engednünk"* szavakat. Mert a gyerekeknek ez a természetes. Sokuknak ehhez a módszerhez még arra sincs szükségük, hogy a táblázatot leírják. Fejben kiszámítják. Mire mi mankót adnánk a megoldáshoz, ők már mondják az eredményt. És a megérdemelt dicséret helyett jön a ledorongolás: *„Igen, de ez nem sokat ér. Ezt valahogy le is kell jegyezned!"* Sőt: *„...le is kell **vezetned**"*. Ezen a ponton már a kreatív gyerek is unalmasnak, száraznak fogja érezni a matematikát.

3. FELADAT:

Egy gazdának nyulai és tyúkjai vannak. A 14 állatnak összesen 44 lába van. Mennyi a nyúl, és mennyi a tyúk?

A felnőttek többsége meg van róla győződve, hogy ezt a feladatot csak egyenletrendszerrel (esetleg egyenlettel) lehet megoldani. Hogy is nézne ki a megoldás egy kétismeretlenes egyenlettel?

A tanár megoldása:

A gazdának x nyula és y tyúkja van. Az állatok száma összesen 14, ezért $x + y = 14$. Egy nyúlnak 4 lába van, egy tyúknak pedig 2, ezért x nyúlnak $4x$, y tyúknak pedig $2y$ lába van. A lábak száma ezért: $4x + 2y = 44$. A kétismeretlenes egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $x = 8$ és $y = 6$, tehát a gazdának 8 nyula és 6 tyúkja van.

Egy alsó tagozatos tanuló (lehetséges) megoldása:

A gyerek elővesz 14 játékkockát (ezek szemléltetik az állatok „testét") és 44 pálcikát (ezek az állatok lábai). Először minden kockához elhelyez két-két pálcikát. Azt látja, hogy maradt még néhány pálcikája. (Mindegy, hogy mennyi, neki nem kell megszámolnia. Mi tudjuk, hogy ez 16 darab.) A megmaradt pálcikákat is szétrakja kettesével a kockákhoz. 8 olyan kockát kap, amely mellett négy-négy, és 6 olyant, amely mellett két-két pálcika van. A gazdának tehát 8 nyula és 6 tyúkja van.

Egy *felső tagozatos* már arra is képes, hogy szemléltetés nélkül is *szemléletesen* gondolkozzon: 14 állatnak legalább 28 lába van. Marad még 44 – 28 = 16 láb. Ezeket kettesével szétosztva még nyolc állatnak tudok plusz két-két lábat adni. Tehát 8 négylábú és 6 kétlábú állata, azaz 8 nyula és 6 tyúkja van a gazdának.

Vég nélkül sorolhatnánk a példákat. Amikor középiskolában vagy akár az egyetemen nehézzé válik egy matematikai probléma megértése, még ott is segít a „visszalépés" a próbálkozáshoz/kísérletezéshez.

Egyetlen olyan terület van, ahol – a fent mondottakkal szemben – már alapiskolai szinten sem szabad megengedni a próbálkozást: ez a *geometriai szerkesztések* világa. Legjobb versenyzőimnek gyakran adtam fel szokatlan módon egy-egy szerkesztési feladatot. Megrajzoltam egy trapézt, majd színessel megjelöltem néhány adatát: például az *EFGH* trapéz *EF* oldalát, *GH* oldalát, *HEF* szögét és *GFE* szögét, és megkértem, hogy szerkesszen csupán körzőt, ceruzát és vonalzókat használva egy ugyanilyen trapézt. A megoldást szinte mindegyikük úgy kezdte, hogy az *EF* szakasz fölvétele, majd az *E* csúcsnál és az *F* csúcsnál fekvő belső szögek átmásolása után megpróbálták addig tologatni az *EF*-fel párhuzamosan a vonalzójukat, amíg annak hossza meg nem egyezett az én trapézom *GH* oldalával. (Azt ők is tudták, hogy az *EH* és az *FG* oldalak hosszát nem használhatják fel, hiszen azokat nem jelöltem színessel.) Hogy maguk is belássák, miért helytelen a próbálgatás a szerkesztésben, gyakran „játszottunk" úgy, hogy ők a padjukban ülve szerkesztettek, és mondták a szerkesztés elemi lépéseit, amit nekem a tanári asztalnál ülve, a saját papíromon kellett végrehajtanom. Azt, hogy „szerkesszek egy szakaszt, amely párhuzamos az *EF*-fel, és olyan hosszú, mint a *HG* szakasz", persze nem lehetett értelmezni. Sok-sok vázlatrajz megrajzolása után jöttek rá, hogy ebben a feladatban csakis akkor lesznek eredményesek, ha az *EFGH* trapézt „annak fordítottjával" kiegészítik egy paralelogrammára. A folytatást az olvasóra bízom...