MARCZIS GYÖRGY

UGYE, SZÉP A GEOMETRIA?

Irénkének és Ernőnek!

Kedves, Érdeklődő Olvasóm!
Több mint másfél évtizede veszek részt előadóként a Kárpát-medencei magyarság nagyszerű matematikai seregszemléin, a *Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó*kon. Ez a találkozó nemcsak szakmai továbbképzést, feltöltődést, kihívást jelent a résztvevő diákok és tanárok számára, hanem összetartozásunkat is erősíti. Éppen ezért örömmel mentem diákjaimmal és kollégámmal egy Békés megyei csapat vezetőjeként az elmúlt év őszén is Révkomáromba.

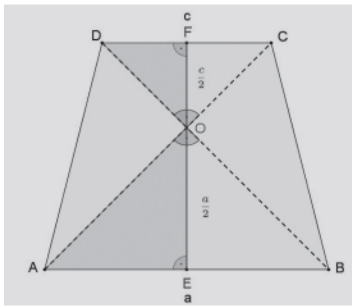
Dolgozatom a révkomáromi *XXVII. Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó 2019. november 23*-i előadásom kibővített, szerkesztett anyaga.

Akkori feladatmegoldó órám elsődleges célja az volt, hogy néhány tanulságos, számomra szép, esztétikus geometriai feladatot bemutassak a diákoknak és a pedagógus kollégáimnak, reménykedve abban, hogy a matematikának a középiskolában egy kicsit elhanyagolt területét megkedveltetem velük. Meggyőződésem, hogy az elemi geometria az alkotó gondolkodásra nevelésben alapozó jelentőségű. A foglalkozás interaktív volt, felhasználtam a dinamikus *GeoGebra* nyújtotta lehetőségeket is, ami az esztétikai nevelésnek egy kiváló lehetősége.

A feladatokat *Eigel Ernő,* csíkszeredai igazgató-matematikatanár *Síkgeometriai feladatok* című gyűjteményéből válogattam. A kiadvány második kötete *Térgeometriai feladatok* címmel is megjelent már. Mindkét kiváló munkát ajánlom mindenkinek.

Előadásomhoz és a dolgozat megírásához nagy segítséget nyújtott a feladatgyűjtemények szerzője mellett *Pálinkás István* szoftvermérnök, egykori tanítványom és *Horváth Géza* lektor is. Köszönöm munkájukat.

1. Igazoljuk, hogy egy olyan szimmetrikus trapéz területe, amelynek átlói egymásra merőlegesek, egyenlő egy olyan négyzet területével, amelynek oldala akkora, mint a trapéz magassága!
Megoldás: Legyen *O* a trapéz két átlójának metszéspontja, *EF* az *O*-n áthaladó, *AB*-re merőleges szakasz! Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő, közismert, megszokott jelöléseket: *AB* = *a* és *CD* = *c*!

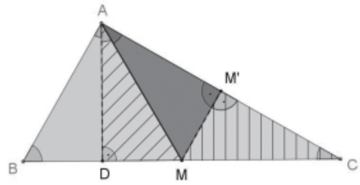


Mivel a négyszögünk szimmetrikus trapéz és *DB* ⊥ *CA*, ezért az *ABO*Δ és *CDO*Δ egyenlő szárú derékszögű háromszög. Az *E* és *F* pontok a trapéz párhuzamos oldalainak felezőpontjai, így *AEO*Δ és *DOF*Δ szintén egyenlő szárú derékszögű háromszög $\frac{a}{2}$ illetve $\frac{c}{2}$ befogókkal. Ebből következik a trapéz területére vonatkozó közismert szabály alapján, hogy:

$$t_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}\cdot EF = \frac{a+c}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)^2 = EF^2$$

Ezt kellett igazolnunk, hiszen EF^2 megegyezik egy *EF* oldalú négyzet területével.

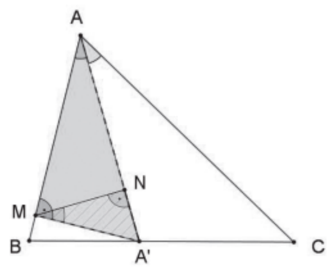
2. Az ABCΔ-ben AD magasságvonal és AM súlyvonal az ábra szerint. Számítsuk ki az ABCΔ szögeit, ha a BAD∠, DAM∠ és MAC∠-ek egyenlők (a BC szakaszon a pontok elhelyezkedési sorrendje: B, D, M, C)!
Megoldás: Ha *BAD*∠ = *DAM*∠ és *AD* ⊥ *BM* ⇒ *ABM*Δ egyenlő szárú és *BD* = *DM*, akkor *MC* = 2 · *BD* = 2 · *DM*, mert *BM* = *MC* (*AM* súlyvonal, *M* felező pont). Húzzunk merőlegest *M* pontból az *AC* oldalra, legyen a talppont *M'*!



Az *ADM*Δ egybevágó az *AMM'*Δ-gel, mert mind a kettő derékszögű, mindkettőnek megegyezik a feltételben megadott két hegyesszöge, és az *AM* átfogó közös. Ebből következik, hogy a *DM* = *MM'*. Így *2 · MM'* = *MC,* amiből következik, hogy az *MCM'*Δ félszabályos, tehát az *MCM'*∠ = 30°, így a *DAC*∠ = 60°. Mivel a feltétel szerint a *DAM*∠ és az *MAC*∠ egyenlő, így ezek mindketten 30°-osak, de a feltétel miatt a *BAD*∠ is 30°-os, tehát a *BAC*∠ = 90°, az *ABC*∠ = 60°.

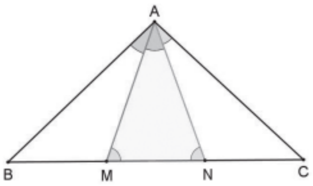
Összefoglalva: az *ABC*Δ félszabályos, szögei: 30°, 60° és 90°.

3. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A csúcsnál levő szög 60°-os, amelynek szögfelezője AA' (A' ∈ BC). Az A' pontból húzzuk meg az AB oldalra merőleges A'M szakaszt (M ∈ AB), majd az M pontból az AA'-re merőleges MN szakaszt (N ∈ AA')! Igazoljuk, hogy 3 · A'M = AA' + 2 · A'N!
Megoldás: Mivel *BAC*∠ = 60° ⇒ *BAA'*∠ = 30°. *A'MN*∠ = *BAA'*∠ = 30°, mert merőleges szárú hegyesszögek. Így mind az *AMA'*Δ, mind az *MNA'*Δ félszabályos háromszög. (A 30°-os szöget tartalmazó derékszögű háromszöget nevezzük félszabályosnak, hiszen ez egy szabályos háromszög „fele".) Ezek közismert tulajdonsága alapján: *2 · A'M* = *AA'* és *A'M* = *2 · A'N*. A két egyenlőséget összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást: *3 · A'M* = *AA'* + *2 · A'N*



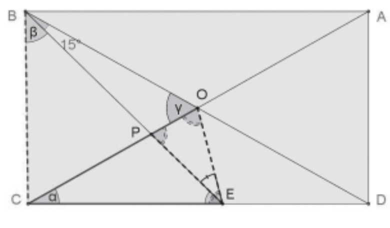
4. Az ABCΔ egyenlő szárú (AB = AC). Az A csúcsnál lévő szögét a BC oldal M és N pontjai által meghatározott AM és AN szakaszokkal az ábra szerint három részre osztjuk úgy, hogy a BAM∠, az MAN∠ és az NAC∠ egyenlő legyen (harmadoljuk a BAC∠-et). Lehetséges-e, hogy a BC oldalon keletkezett BM, MN és NC szakaszok egyenlők legyenek: BM = MN = NC?

Megoldás: Ha $BAM\angle = MAN\angle$ és $BM = MN$ lenne, akkor az $ABN\Delta$ egyenlő szárú lesz, mert az AM szakasz egyben szögfelező és súlyvonal is, így AM oldalfelező merőleges is kell, hogy legyen, ami azt jelenti, hogy $AM \perp BN$, vagyis $AMN\angle = 90^o$. Ugyanígy: ha $MAN\angle = NAC\angle$ és $MN = NC$ lenne, az $AMC\Delta$ szintén egyenlő szárú lesz, ami azt jelenti, hogy $AN \perp MC$, vagyis $ANM\angle = 90^o$. A két állítást összevetve azt kapjuk, hogy az $MNA\Delta$-nek két derékszöge van, ami lehetetlen, így BM, MN és NC szakaszok egyenlősége az adott feltételek mellett nem lehetséges.



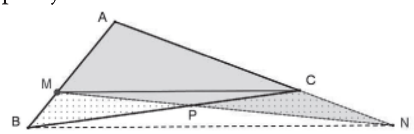
5. Az ABCD téglalap (AB > BC) B csúcsából húzott szögfelező és a B csúcsból induló átló 15^o*-os szöget zár be az ábra szerint. A B csúcsból húzott szögfelező az AC átlót P-ben, a CD oldalt E pontban metszi. Jelöljük O-val az ABCD téglalap átlóinak metszéspontját! Igazoljuk, hogy a COE∆ és PEO∆ egyenlő szárú!*

Megoldás: Mivel BE egy derékszög szögfelezője (téglalap), így $CBE\angle = 45^o$, amiből következik, hogy $BCE\Delta$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $BC = CE$. Mivel $45^o + 15^o = 60^o$, a téglalap átlói egyenlőek és felezik egymást, így a $BCO\Delta$ szabályos, tehát $BC = CO$. A két egyenlőséget összevetve: $BC = CE = CO$, ami azt jelenti, hogy a $COE\Delta$ egyenlő szárú, amit először igazolnunk kellett. A téglalap tulajdonságából (minden szöge derékszög) és a $BCO\Delta$ szabályosságából (minden szöge 60^o) következik, hogy az $OCE\angle = 30^o$. Felhasználva, hogy $COE\Delta$ egyenlő szárú, így $COE\angle = CEO\angle = 75^o$. Mivel $BCE\Delta$ egyenlő szárú és $CBE\angle = 45^o$, így $CEB\angle = 45^o$, amiből az következik, hogy $PEO\angle = 75° - 45° = 30^o$ lesz. A $PEO\Delta$ harmadik szöge a belső szögek összege miatt így $OPE\angle = 75^o$, amiből következik, hogy $PE = OE$ (egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldal van), így a $PEO\Delta$ szintén egyenlő szárú, amit másodszorra igazolnunk kellett.



6. Legyen ABC háromszög AB oldalának belsejében M egy tetszőleges mozgó pont! B-ből CM egyenessel húzott párhuzamos egyenes az AC egyenest az N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AMN háromszög területe nem változik, ha az M pont mozog az AB szakaszon!

Megoldás: A feltételek alapján az $MBNC$ négyszög létezik (M belső pont) és trapéz ($MC \parallel BN$). Legyen P az $MBNC$ trapéz átlóinak metszéspontja!



Az $MBN\Delta$ és a $CBN\Delta$ területei egyenlők, mivel BN oldaluk közös, és az ezen oldalhoz tartozó magasságuk a $MC \parallel BN$ miatt egyenlő. Ebből a két egyenlő területből kivonva a $BNP\Delta$ területét, kapjuk, hogy az $MBP\Delta$ és a $CPN\Delta$ (nem szükségszerűen egybevágók) területei megegyeznek. Ezt felhasználva, és a konstrukciót figyelembe véve kapjuk, hogy:

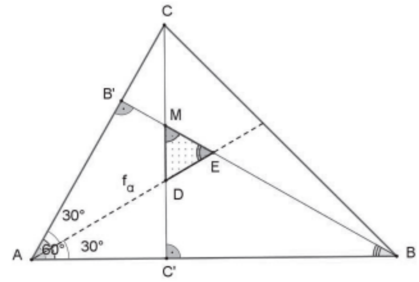
$$t_{AMN} = t_{AMPC} + t_{CPN} = t_{AMPC} + t_{MBP} = t_{ABC}$$

Mivel az $ABC\Delta$ fix volt, így a területe sem változott, állandó maradt, amivel igazoltuk állításunkat.

Megjegyzés: Ha a feltételek között nem ragaszkodunk ahhoz, hogy M belső pont legyen, akkor $A = M$ esetén nem keletkezik háromszög, nincs mit bizonyítani. $M = B$ esetén pedig a keletkezett háromszög megegyezik az $ABC\Delta$-gel, így az állítás nyilvánvaló.

7. Az ABC hegyesszögű háromszögben $CAB\angle = 60^o$*. A BB' és CC' magasságvonalak egymást M-ben, míg a* $CAB\angle$ *szögfelezőjét* (f_α) *a D és az E pontokban metszik az ábra szerinti elrendezésben. Igazoljuk, hogy az MDE háromszög szabályos!*

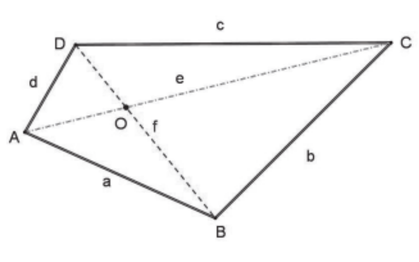
Megoldás: A feltételek között megadott $CAB\angle = 60^o$, és f_α szögfelezősége miatt $B'AE\angle = 30^o$. A derékszögű $AEB'\Delta$ (BB' magasságvonal) másik hegyesszöge így $AEB'\angle = 60^o$, ami a konstrukció miatt azonos a $DEM\angle$-gel (más pontokkal jelöltük). Szintén a feltételek miatt ($CAB\angle = 60^o$ és BB' magasságvonal) az $ABB'\Delta$ derékszögű, és a másik hegyesszöge $ABB'\angle = 30^o$. Az $ABB'\angle$ egyben hegyesszöge a derékszögű $MC'B\Delta$-nek is (MC' a CC' magasságvonal része). A belső szögek összege miatt a $BMC'\angle = 60^o$. De a konstrukció miatt a $BMC'\angle$ és az $EMD\angle$ azonosak (szintén más pontokkal jelöltük), így az $MDE\Delta$ másik szöge is 60^o-os. Tehát az $MDE\Delta$-ben igaz, hogy $DEM\angle = EMD\angle = 60^o$. Így az $MDE\Delta$-nek van két 60^o-os szöge, amiből következik a belső szögek összegét ismerve, hogy minden szöge 60^o-os, tehát az $MDE\Delta$ szabályos. Ezt kellett bizonyítanunk.



Megjegyzések: Ha az f_α szögfelező az M magasságponton megy át, akkor az $ABC\Delta$ szabályos lesz, amiből az következik, hogy az $MDE\Delta$ nem jön létre (elfajuló háromszög), nincs mit bizonyítani. Előfordulhat az is, hogy az M pont nem az ábra szerint a szögfelező „felett", hanem „alatt" lesz. A bizonyítás ekkor is lényegében megegyezik az előzővel. Más betűzésű szögeket, alakzatokat kell vizsgálni. Érdemes és hasznos foglalkozni azokkal az esetekkel is, amikor az $ABC\Delta$ nem hegyesszögű (derékszögű vagy tompaszögű). Ezt az olvasóra bízom, és javaslom, hogy készítsen ábrát *GeoGebrával*, használja ki annak dinamikus funkcióját, lehetőségét!

8. Igazoljuk, hogy egy ABCD konvex négyszögben az átlók négyzetösszegének és összegének aránya kisebb, mint a négyszög kerületének a fele!

Megoldás: Jelöljük az $ABCD$ konvex négyszög oldalait és átlóit az egyszerűség kedvéért az ábrának megfelelően: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$ és $BD = f$!



Alkalmazzuk előbb az $ABC\Delta$-ben majd az $ACD\Delta$-ben a háromszög-egyenlőtlenséget: $a + b > e$, illetve $c + d > e$! A két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva, majd az így kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozva a pozitív e-vel, kapjuk: $2 \cdot e^2 < e \cdot (a + b + c + d)$. Hasonlóan járjunk el az $ABD\Delta$-ben és a $CDB\Delta$ -ben! Először kapjuk, hogy $a + d > f$, illetve $b + c > f$. Folytatva a korábbihoz hasonló eljárást: $2 \cdot f^2 < f \cdot (a + b + c + d)$. Az átlók négyzeteit tartalmazó két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva, 2-vel és az átlók pozitív összegével leosztva kapjuk:

$$\frac{e^2 + f^2}{e + f} < \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{k_{ABCD}}{2}.$$

Ezt kellett bizonyítanunk, ha figyelembe vesszük az eredeti négyszögben az átnevezéseket.

9. Igazoljuk, hogy bármely konvex sokszögnek nem lehet háromnál több hegyesszöge!

Megoldás: Jelöljük a konvex sokszögben a szögek számát n-nel, a hegyesszögek számának maximumát k-val, a belső szögek összegét S_n -nel, a hegyesszögek összegét $S_{h,k}$-val, a nem hegyesszögek összegét pedig S_{n-k}-val!

A jelölésekből és a hegyesszög ($< 90^o$) értelmezése miatt:

$S_{h,k} < k \cdot 90°$ (*)

Szintén a jelölésekből és a konvexitásból (minden szög $< 180^o$) következik:

$S_{n-k} < (n - k) \cdot 180°$ (**)

Tudjuk azt is, hogy az n oldalú sokszög belső szögeinek összege:

$S_n = (n - 2) \cdot 180°$ (***)

A nem hegyesszögek összege felírható a belső szögek összege (***) és a hegyesszögek összegének különbségeként:

$S_{n-k} = S_n - S_{h,k} = (n - 2) \cdot 180° - S_{h,k}$

Ezt a szögösszeget csökkentjük, ha a hegyesszögek összege helyett nagyobbat (*) vonunk ki:

$S_{n-k} = (n - 2) \cdot 180° - S_{h,k} > (n - 2) \cdot 180° - k \cdot 90°$

Felhasználva még a (**) egyenlőtlenséget, következik, hogy:

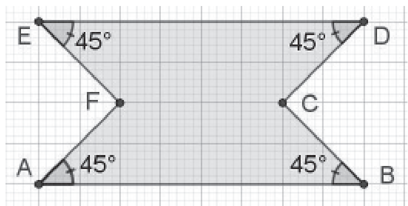
$(n - 2) \cdot 180° - k \cdot 90° < S_{n-k} < (n - k) \cdot 180°$

A kettős egyenlőtlenség bal oldalán és jobb oldalán álló zárójeleket felbontva, majd az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk, hogy:

$k < 4$

A jelölések alapján ez pontosan azt jelenti, hogy az n oldalú, konvex sokszögben a hegyesszögek maximális száma nem lehet több, mint három, amit igazolni akartunk.

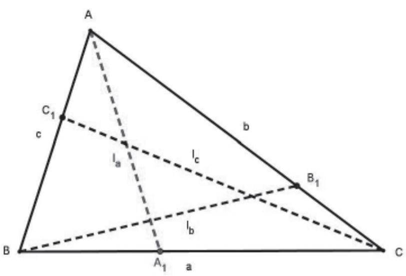
Megjegyzés: Természetesen az a feltétel, hogy a sokszögünk konvex, elengedhetetlen. Legyen itt egy koordináta-rendszerben *GeoGebrával* szerkesztett, szemléletes ellenpélda, amely nem konvex hatszögben van négy (háromnál több) hegyesszög!



10. Legyen az $ABC\Delta$-nek a BC, CA és AB oldalán egy-egy tetszőleges $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ belső pont! Jelöljük az AA_1 szakaszt I_a -val, BB_1 szakaszt I_b -vel és CC_1 szakaszt I_c -vel! Igazoljuk, hogy:

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$

Megoldás: Az egyszerűség kedvéért vezessünk be további jelöléseket az ábra szerint: $AB = c$; $BC = a$ és $CA = b$!



A bizonyítást két eset vizsgálatával végezzük: nézzük először a kettős egyenlőtlenség bal oldalát, utána pedig a jobb oldalát!

Bal oldali egyenlőtlenség $\left(\frac{1}{2} <\right)$:

Az $ABA_1\Delta$-ben és $ACA_1\Delta$-ben:

$I_a > c - A_1B$ és $I_a > b - A_1C \Rightarrow I_a > \frac{b + c - a}{2}$

A $BCB_1\Delta$-ben és $ABB_1\Delta$-ben:

$I_b > a - B_1C$ és $I_b > c - B_1A \Rightarrow I_b > \frac{a + c - b}{2}$

Az $ACC_1\Delta$-ben és $BCC_1\Delta$-ben:

$I_c > b - C_1A$ és $I_c > a - C_1B \Rightarrow I_c > \frac{a + b - c}{2}$

Ha a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, utána összevonunk és osztunk a pozitív $(a + b + c)$-vel, a bizonyítandó kettős egyenlőtlenség bal oldali egyenlőtlenségét kapjuk:

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c}$$

Jobb oldali egyenlőtlenség $\left(< \frac{3}{2}\right)$:

Az $ABA_1\Delta$-ben és $ACA_1\Delta$-ben:

$I_a < c + A_1B$ és $I_a < b + A_1C \Rightarrow I_a < \frac{a+b+c}{2}$

A $BCB_1\Delta$-ben és $ABB_1\Delta$-ben:

$I_b < a + B_1C$ és $I_b < c + B_1A \Rightarrow I_b < \frac{a + b + c}{2}$

Az $ACC_1\Delta$-ben és $BCC_1\Delta$-ben:

$I_c < b + C_1A$ és $I_c < a + C_1B \Rightarrow I_c < \frac{a + b + c}{2}$

Ha a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, utána összevonunk és osztunk a pozitív $(a + b + c)$-vel, a bizonyítandó kettős egyenlőtlenség jobb oldali egyenlőtlenségét kapjuk:

$$\frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$

Mind a két esetben kihasználtuk, hogy: $A_1B + A_1C = a$, $B_1C + B_1A = b$ és $C_1A + C_1B = c$. Ha a két eset vizsgálata végén kapott egyenlőtlenségeket összevetjük, a bizonyítandó kettős egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{2} < \frac{I_a + I_b + I_c}{a + b + c} < \frac{3}{2}$$

Kedves, Érdeklődő Olvasóm!

Ha idáig eljutottál, reményeim szerint ízelítőt kaptál tőlem abból, hogy igen, szép a geometria. De miért szép? Lehet erre pontosan válaszolni? Egy személyes történettel megpróbálom a lehetetlent, hátha sikerül.

Középső gyermekünk amatőrként *hatszoros Ironman* (3,8 km úszás, 180 km kerékpározás, 42,195 km futás). Minden nagyatádi versenyét, látva a fantasztikus teljesítményét, küzdelmét, szülőkként kicsit izgulva, de nagyon büszkén szurkoltuk végig. Megkérdeztük tőle többször is: miért csinálod, hiszen ez annyira nehéz. Sosem volt a kérdésre egzakt, egyértelmű válasz. Egyszer viszont elküldte nekünk kérdés nélkül *Juhász Gyula: Szerelem?* című versének utolsó versszakát:

„Én nem tudom, mi ez, de jó nagyon,
Fájása édes, hadd fájjon, hagyom.
Ha balgaság, ha tévedés, legyen,
Ha szerelem, bocsásd ezt meg nekem!”

Mindent megértettünk. Talán ez a vers lehet a válasz a címben feltett kérdésre is!

Bízom benne, sokan így vagytok, így lesztek vele!