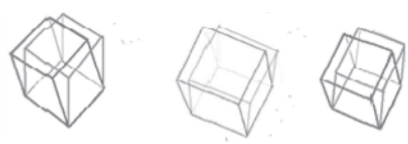
TÓTH ATTILA – NAGY LEHOCKY ZSUZSA

A GEOMETRIA JELENTŐSÉGE

A geometria oktatásával és hatékony közvetítési módjaival számos kutatás foglalkozott az utóbbi években. Az ELTE-n közzétett felmérések azt mutatják, hogy a geometriára és a szemléltetésekre egyre nagyobb szükségünk van, mivel a hallgatók 24%-a képes csak megérteni kísérletek és képek nélkül a számtani és mértani feladatokat. 26%-kal nő ezek száma, ha már képeket, illusztrációkat és geometriai ábrákat is bevetnek a tanárok az ismertetés folyamatába, és a hallgatók 91%-a megjegyzi az adott anyagrészt, ha kísérleteket is mutatnak be hozzá. Az eredmények egyértelműen alátámasztják, hogy megéri szemléltetni, rajzolni és rajzoltatni.

Nemcsak az egyetemeken végzett kutatások, hanem a gyakorlati tapasztalat is azt mutatja, hogy a megfelelő geometriatudás és térlátás elengedhetetlenül fontos lenne a jövő nemzedék számára nemcsak a természettudományi szakokon, hanem a közgazdasági szakokon is. Ilyen jellegű matematikát sok egyetemen és főiskolán tanítanak, talán sokak számára meglepő módon pl. az idegenforgalmi szakokon is. A döbbenet a diákokat éri leginkább, mert nem feltételeznek ilyen erős matematikát, és a legrosszabb álmukban sem gondolnák, hogy geometriai alapokra, tudásra is szükségük lesz szakmájuk végzése során.

A múltban ez nem okozott ekkora gondot, hiszen már az általános iskolákban is volt ábrázoló mértan, majd pedig erre kapcsolódott a középiskolákban az ábrázoló geometria. Ezek a tantárgyak megalapozták a geometriai térlátást, például a merőleges vetítések és a párhuzamosokkal való ábrázolás a hetvenes, nyolcvanas évek tanulóinak nem okoztak nagy fejtörést. Az ábrázoló geometria segítségével megoldhatónak bizonyultak a térbeli feladványok, hiszen a diákok tanultak axonometriát, metszeteket, párhuzamos vetítéseket, szabályos alakzatokat és térbeli felületeket. A műszaki jellegű középiskolákban erre épülhetett a műszaki rajz. Az előző generációk térlátását segítette a piros-zöld szemüveggel kialakított ún. térláttatós ábrázoló mértan is. A szem „becsapására" tett kísérlet sikerrel járt, hiszen a szemüveg térbeli alakzatoknak mutatta az ábrákat. Ezt mutatja be Pál Imre fantasztikus könyve, amelyik 1959 óta több kiadásban megjelent, már 1960-ban szlovákra is lefordították (Pál, 1960). Pál kutatása segítségével sikerült a középiskolás tanulók térlátását javítani, hiszen láthattuk, hogy csak a szemtávolsághoz mérten arányaiban megszerkesztett alakzatoknál jön elő a térbeli hatás a kétszínű szemüveggel (csak a középső kockánál, mert az van pontosan megrajzolva a jobb oldali pontos szerkesztés alapján, lásd 1. ábra).

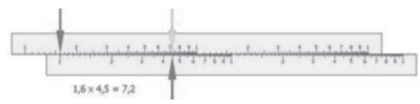


1. ábra: Térbeli hatás érzékeltetése kétszínű szemüveggel

MATEMATIKAI MŰVELETEK GEOMETRIAI SZEMLÉLTETÉSE

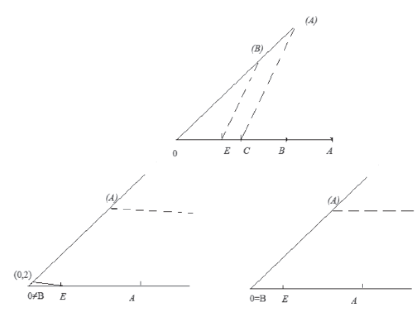
A matematikai alapműveletek szemléltetése is történhet egyszerű ábrák segítségével, tehát akár itt is építhetünk a geometriai tudásra. Az összeadás művelete nemcsak a számtengelyen valósítható meg, hanem műveleti operátorokkal is érzékeltethető. Ez könnyebbé teszi azt a kérdést, hogy mennyi hiányzik még bizonyos összeghez, vagyis akár a kivonás művelete is érthetővé válik. Óriási jelentősége van az elektrotechnikában a vektoriális ábrázolási módnak, hiszen ennek a segítségével értik meg a diákok, hogy mi történik pl. a váltakozó áram esetében. Időben késik az áram a feszültséghez képest – vagy fordítva, és ezt az empirikus kísérletekkel alátámasztva csakis egy képzetes (imaginárius – Im) számtengellyel lehet megérteni. Az elektrotechnika képletei a vektoriális összeg alapján számíthatóak és nagyon egyszerűen ábrázolhatóak.

Az újabb generáció (Y, Z és alfa) már nem nagyon ismeri a zsebszámológép elődjét, a logarlécet. Az idősebb generációnak ez volt az egyetlen „számológépe" (lásd 2. ábra). A logaritmikus skálán való pontos tologatás segítségével elvégezhető volt a szorzás művelete, akát tizedes pontossággal is.



2. ábra: Logarléc

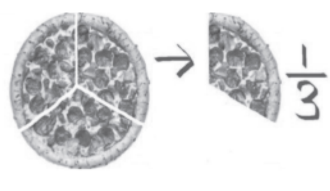
Az osztás frappáns módon az arányosság segítségével hajtható végre mértani úton. Ennek a szemléltetése OA/OB leolvasható a számtengelyen 0C/0E arányok megjelenítésével. Az ilyen módszerrel történő magyarázattal tudjuk megértetni azt is, hogy kicsi számokkal (pl. 0,2) való osztáskor *a/0,2* eléggé nagy, de még látható számot kapunk, és kezd a számtengellyel párhuzamossá válni az a szaggatott egyenes, ami éppen kimetszené a számtengelyen az osztás eredményét, ami viszont nagy szám, és az egyre kisebb osztónál a hányados egyre nagyobb értéket vesz fel. Mígnem a nullával való osztás végtelent eredményez, és ez pontosan annak a mondásnak a geometriai ábrázolása, hogy a „párhuzamosak a végtelenben találkoznak". A nullával való osztásnál az *A* ponton keresztül haladó egyenesnek kellene kimetszeni az x tengelyen az osztás eredményét, de mivel párhuzamossá vált, ezért csak a végtelenben metszi (lásd 3. ábra). De tudjuk-e vajon szemléltetni a végtelent (Vörös & Tóth, 2014)?



3. ábra: Az osztás érzékeltetése

A VÉGTELEN KICSI ÉS VÉGTELEN NAGY GEOMETRIAI ÉRZÉKELTETÉSE

Ezek után felmerülhet a kérdés, hogy vajon ábrázolható-e minden a számtengely segítségével. A számtengelyen folytonos-e a számsor, vagy vannak rajta icipici hézagok? A jelenlegi tudásunk szerint az egész számokhoz csak közelíthetünk, és csakis a „végtelenben” érhetőek utol. A végtelenben való találkozását két párhuzamos egyenessel tehát szemléltetni tudjuk, de hogyan szemléltetnénk a végtelen kicsit? Érzékeltetni tudjuk-e a végtelen kiterjedésű tizedest geometriailag?



4. ábra: Törtszám egyszerű szemléltetése

Vegyünk egy törtszámot, pl. 1/3. Végtelen osztással kapjuk, hogy 1/3 = 0,33333333333… Ez az egyenlet szó szerint azt mondja, hogy az 1/3 = 3.10^{-1} $+3.100^{-1}$ $+3.1000^{-1}$ $+3.10000^{-1}+$ …, amit a végtelen sor felösszegezésével kapunk meg. Azonban senki sem tud végtelen sok számot összeadni, és ilyen formán az egyenlet értelmetlen. Valami egészen másról van szó. Bizonyos értelemben ebben az esetben rosszul használjuk az egyenlőség jelét, mert akárhány tagot adunk is össze a jobb oldalon, sosem kapunk pontosan 1/3-ot, egyszerűen azért, mivel az *1/3 nem váltható át tizedes törtté.* Mindamellett jogos az egyenlőség jele — ebben és a felsőbb matematika számtalan más egyenletében —, ha helyesen értjük, hogy miről van szó. Az egyenlőség helyes értelmezése az, hogy bár sosem tudjuk megszüntetni az egyenlet két oldala között levő rést, elérhetjük, hogy a két oldal különbsége, ha nem is pontosan nulla, de tetszőlegesen kicsi legyen.

Mi történne azonban, ha a számtengelyből kivennénk az összes egész számot? Vajon milyen *rés* vagy *hézag* keletkezne? Akkor definálhatatlan maradna a racionális számok halmaza (Tóth, 2015). Mi lenne a megoldás? A *0* (semmi) tologatásával a számtengelyen még nem oldunk meg semmit sem, mert a számok számtengelyre való rajzolása is csak egy elvonatkoztatás. Talán addig kellene számolnunk, ameddig a „takarónk ér“, illetve ameddig a számológépünk karaktere engedi. Mert olyan számolgatással, ahogyan tanítjuk a végtelen tizedes szám felírását az egész számok segítségével, a következőkből nyilvánvalóbbá válhat a „végtelenül kicsi” fogalma: pl. az *1,999...* azt jelenti, hogy a *9*-es végtelen sokáig folytatódik a tizedesjel után. Megszorozva tízzel, az eredmény: *19,9999999...* A *9*-esek a végtelenbe folytatódnak, ezért a *10*-zel való szorzás után is a végtelenbe folytatódnak. Ha a szám *10*-szereséből kivonjuk a szám *1*-szeresét, megkapjuk a *9*-szeresét: *19,9999999.... – 1,99999999... = 18.* A tizedes vessző utáni *9*-esek mindkét számnál a végtelenbe folytatódnak (modern értelmezésben jól sejtető kilencesek túlcsordulásáról van szó…), tehát egymásból kivonva őket *0* lesz a tizedes vessző után, így az eredmény a kivonás után *18.* Mivel a *10*-szeres számból vontuk ki az egyszeres számot, maradt a *9*-szeres számunk, ami nem más, mint a *18. 18x/9x=2.* Ebből kifolyólag *1, 9999.... = 2*, és a két számot egymásból kivonva az eredmény *-0,00000.....1.* Minél nagyobb a számítógépem karakterszáma, annál messzebbre kerül az egyes, ami a közelítés hibájaként értelmezendő. Vajon elegendő-e elmenni az általunk észlelhető világ (vagy számítógép) határáig? Láncos Kornél híres matematikus ebben az esetben Gauss értelmezésére hivatkozik, miszerint a végtelen nem valami ténylegesen elérhető dolog, csupán egy véget nem érő *eljárás*, melynek révén egy mennyiséget egyre pontosabban megközelítünk anélkül, hogy valaha is ténylegesen elérnénk. Az egész számokhoz például *1/n* sorozattal szoktunk közelíteni. A végtelen nagy és végtelen kicsi számok ábrázolására a múltban és napjainkban is több kísérlet történt.

Filozófiai, fizikai és geometriai úton próbálják azt is bizonyítani, hogy az alfa egyenlő az omegával, vagyis a végtelenbe való közelítéssel az origóban kötünk ki (Wenmackers, 2011). Érdekes a nagyon kicsi és nagyon nagy számok szorzatának a meghatározása és ezek keveréke, aminek még nem tudják a pontos értelmét.

kicsi + kicsi = kicsi kevés x kicsi = kicsi kicsi x kicsi = (nagyon) kicsi	nagy + nagy = nagy kevés x nagy = nagy nagy x nagy = (nagyon) nagy
kicsi x nagy = határozatlan	

5. ábra: Műveletek

A nagyból a kisebb felé haladva gyönyörű, szinte művészien szép geometriai alkotások keletkeztek, pedig csak osztunk. Nemcsak mágneseket felezhetünk, hanem alakzatokat duplázhatunk (Hrbáček, 2010). Szimmetrikus rajzok által keletkeznek a fraktálok… Vajon meddig lehet elmenni? A láttatás határáig…? Ugyanígy a fizikában érdekes módon problémát jelent a végtelen osztás. A mágnest kétfelé fűrészelve ugyanis 2 újabb mágnest kapunk, tehát nem választódik szét a két pólus. Majd 4, utána 8 és megkérdőjelezhetnénk, meddig kapunk még újabb mágneseket felezéssel. A válasz fizikailag csak ennyi: amíg mágneses tulajdonságot mutat (Vörös & Tóth, 2014). A nyitrai egyetem matematikusai azt is bizonyították, hogy probléma van a végtelen felezéssel nemcsak a fizikában, hanem a matematikában is (Vrábel, 2014).

A fraktálok (végtelenül komplex geometriai alakzatok) végtelenségéről pedig megjegyzendő, hogy a mérhető valóság falai között mozogva alkossunk fraktálszerűen, fogadjuk el, hogy egy mérhetetlenül nagy partvonal véges nagyságú területet, kontinenst szegélyez. Így reálisabbá, érthetőbbé válik számunkra talán az a világ is, amelynek megismerésében az elme kapacitása és az érzékszerveink számának véges volta korlátoz minket.

Tapasztalataink egyértelműen azt mutatják, hogy szükséges fejleszteni a síkbeli és térbeli orientációját a felnövő nemzedéknek, akik a virtuális világban oly kevés valós, kézzelfogható jelenséggel találkoznak. Remélhetőleg az előző generációk mintájára majdan a fiatalok megtalálják a módját annak, hogy kilépjenek a maguk képzetes világából, apró lépésekben kisebb kísérletekkel, majd egyre komolyabb és felelősségteljesebb valós folyamatokban visszakerüljenek a tapintható és még alakítható világunkba.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Hrbáček, K. (2010): *Analysis sith Ultrasmall Numbers.* The American Mathematical Monthly
- Pál, I. (1960): *Deskirptívna geometria videná priestorove.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
- Tóth, A. (2015): *A végtelenül nagy és végtelenül kicsik világa. Ab igne ignem.* Nyitra, KeTK, NyKFE
- Vörös, Z. & Tóth, A. (2014): *A végtelen határozatlansága.* XVIII. Apáczai-napok Tudományos Konferencia, Győr, 2014. ISBN 978-963-334-258-9, 434–446.
- Vrábel, P. (2014): *Problems with infinity.* Acta Mathematica 17, Nitra, UKF
- Wenmackers, S. (2011): *Phylosophy of Probability.* PhD-dissertation of University of Groningen