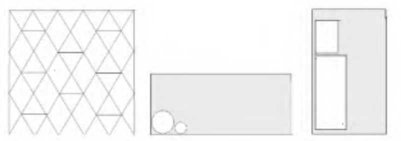
TÓTH ATTILA – LEHOŤÁKOVÁ EVA

MATEMATIKA – RAJZOLVA
A SZEMLÉLTETÉS FONTOSSÁGÁRÓL A MATEMATIKÁBAN

Nem gondoltuk volna a hetvenes években, hogy a rajz és az ábrázolás ekkora szerepet fog betölteni a matematikaoktatásban. A matematikára akkor is úgy tekintettek, mint a tudomány szolgálójára. Ez a szolgáló lehet szép is, tetszetős is, szimmetrikus és aszimmetrikus is. Ugyanakkor a számtani része, az algebra, azóta mintha kicsit jobban fejlődött volna, mint a mértan. Kifejlesztettük az ábrázoló mértant, sokat gyarapodott a műszaki rajz is. Évszázadok tapasztalata, hogy az ábrázolás, a feladat szemléltetése nagyon fontos és sokat segíthet a megértésben (Hamala, 1972). Az új évezredben a matematika új fejezeteket nyitott meg, és rátért egy újabb, könnyebb, mértani megoldásokat tartalmazó útra (Sydsaeter, 2001). A múltban is nagy szerepe volt az ábrázolásnak, hiszen a feladat érzékelhetőbbé tétele éppen abban rejlik, hogyan tudjuk azt minél egyszerűbben szemléltetni, lerajzolni. Sőt, geometriai módszerekhez kell folyamodnunk, hogy gyorsabban megértethessük a számfogalmakat, a matematikai műveleteket (Nagyová Lehocká, 2021). Mi a rajzolás fontosságát hangsúlyozzuk már az óvodáskortól kezdve, hiszen rajzainkkal egyre pontosabban készítjük elő a valóság megértéséhez az utat. Bemutatjuk, hogyan képzeljük el és mérjük, hogy az egyszerű feladványok továbbfejlesztésével érthetőbbé válik-e a maradékos és maradék nélküli osztás (Nagyová Lehocká, 2021). Bizonyosan könnyebben értelmezhető a valós és képzetes számok levezetése az ábrákon keresztül. A feltételes optimalizálás is lehetséges a geometria segítségével. A geometriai szemléltetés mára a statisztikában és a valószínűségszámításban is teret nyert (Vrábelová, 2001).

AZ ALAPOKTÓL

Már az oviban megtanulunk kivágni, alakzatokat szerkeszteni. Amikor még arányok használata nélkül kell rajzolni, akkor a gyermek képzeletvilága tükröződik az alkotásban. Amikor már méretekkel találkozunk, akkor arányaiban, részleteiben alaposabban ismerkedünk meg a valósággal. Egy majdnem százéves tankönyv az alábbi feladat alapján ösztönözi a néhai polgári iskolák tanulóit (Szenes, 1931): *Mennyi szabályos alakzatot, sokszöget találunk a bal oldali ábrán, s vajon valamennyivel kitölthető-e a sík rések nélkül?* Például: maradék nélkül ki tudjuk-e tölteni a teret, ha csak az egyik fajta egyenlőoldalú háromszögből szeretnénk azt megtenni. Egy következő feladat pedig egy élelmiszerkamrában játszódik. *Mennyi hétdecis és bébiételes befőttes üveg helyezhető a polcra, illetve egymás fölé, ha* így is raktározható a két befőtt?

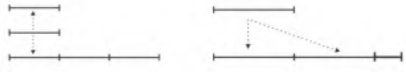


1. ábra: 60 fokos szögben párhuzamos egyenesekkel és szakaszokkal határolt síkrész a bal oldalon, középen egy polcra vízszintesen és függőlegesen (jobb oldali ábra) helyezendő 2 típusú befőttes üveg (saját szerkesztés)

Természetesen ezek a feladatok megoldhatók körzővel és vonalzóval, de színes papírok segítségével kivágott alakzatok egymás mellé helyezésével is.

INNEN ELRUGASZKODVA, A KÖZÉPISKOLÁS MATEKHOZ

Ilyen módon kellene egyértelműen a magyarázatokat mindig szemléltetni, hogy az egyre nehezebb feladatok is könnyedén felfoghatókká váljanak. Ha minél kisebb helyet akarunk hagyni a polcokon, és variálunk, mennyi a maximálisan elhelyezhető 2 típusú befőttes üveg, akkor már csak egy lépés választ el a maradékos osztás megértésétől (Nagyová Lehocká, 2021):

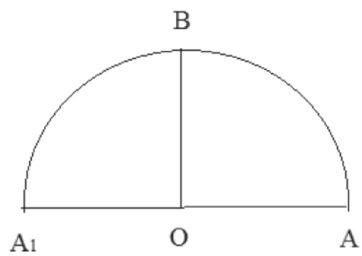


2. ábra: A maradék nélküli osztás 6 = 3.2 + 0; maradékos osztás érzékeltetése 7 = 3.2 + 1

A maradék nélküli és maradékos osztás segítségével pedig a számfogalmak fejlesztéséhez jutunk el. Így válnak szemléltethetővé a racionális és valós számok.

A fizikában azonban eljutottunk a *véges* fogalomhoz, illetve hogy meddig is felezhető egy mágnes. Kettéfűrészelve újabb két mágnes, majd négy, ezt követően 8 keletkezik. A fizikusok szerint addig szeletelhetünk, amíg a legapróbb mágnes is még mágneses tulajdonságot mutat. Egy előző számban bemutattuk a nullával való osztást, ami pedig végtelent jelent, ha a szerkesztésben a párhuzamoson már nem találunk metszéspontot. Így szemléltethetővé lenne az osztás: $\frac{a}{0} = \infty; \frac{a}{\infty} = 0$. A nullával való osztás a matematikusok szerint még értelmezhetetlen, de bizonyíthatóan ábrázolható. A matematikusok szempontjából a végtelen már értelmezett a kibővített valós számok halmazán, de a fizikusok szerint mindennek nincs értelme, hiszen a való világunk véges számú részecskét, elemet tartalmaz. Tehát a végtelennek felesleges nagy jelentőséget tulajdonítani (Hossenfelder, 2019).

Más számok szemléltetését is lehetővé teszi a mértan, mai nevén a geometria. Magyar nyelven az imaginárius szám fogalmát legelőször a Nyitrán kiadott, Ferenczi József kegyestanítórendi (piarista) szerzetes könyvében találjuk, amelyet 1887-ben nyomtattak ki a mennyiségtant kedvelő középtanodai ifjúság számára. Itt így vezetik le a kvaterniók fogalmát:



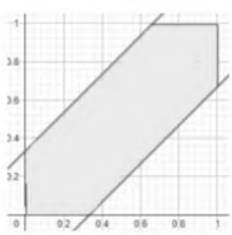
3. ábra: Komplex képzetes számok mértani magyarázata

Érdemes elolvasni a magyarázatot is hozzá, ami 135 évvel ezelőtti, régies nyelven íródott: *„Az egymásra merőleges két vectoregység hányadosa scaláris nem lehet”.* Figyeljük csak meg, az irány még nincs nyíllal jelezve, de a forgatás körülírásával érthetővé lesz: *Hogyha* $q = \frac{\beta}{\alpha}$, *bizonyára* $q = \frac{-\alpha}{\beta}$, *ekkor a bal oldalak szorzata* $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{-\alpha}{\beta} = -1$. *Míg a jobb oldalaké* $q.q=q^2$, *eszerint* $q^2=-1$. A nyitrai piaristáknál tanító szerzetes így szemléltette a kvaterniót *(q)*. Nagy jövőt is jósolt a felhasználásukban, ami be is vált. Ily módon ábrázolás segítségével könnyebben érthető a komplex, imaginárius, tehát képzetes szám, amit a szerző egyszerű forgatással magyaráz.

ÍGY JUTUNK EL A FELSŐFOKÚ MATEMATIKÁIG

Ki hinné, hogy egyszerű területi ábrázolással kiszámolható annak az esélye, hogy egy fiú és egy lány találkozik-e? A két személy a megbeszélésük alapján 12 és 13 óra körül szeretne találkozni, és egyforma feltételeket szabnak egymás irányában. Függetlenül egymástól érkeznek, és úgy döntenek, hogy az előbb érkező fél maximálisan 20 percet hajlandó várni a másikra (tolerancia), miután távozik. Bizonyítottuk már, hogy az összeadás, kivonás egy számtengelyen szemléltethető, a kétismeretlenes egyenlet 2 egyenessel, az egyenlőtlenség pedig félsíkokkal ábrázolható. Tehát mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak? Matematikai nyelven fogalmazva, ha 20 perc = 1/3 óra, akkor ha az *A* személy érkezik előbb, $x \le y$, így $y \le x + 1/3$. Ha a *B* személy érkezik előbb, $y \le x$, így $x \le y + 1/3$, ezt átalakítva $x - 1/3 \le y$, az egyenlőségjellel egyeneseket fejezünk ki, az egyenlőtlenségek pedig félsíkokat adnak.

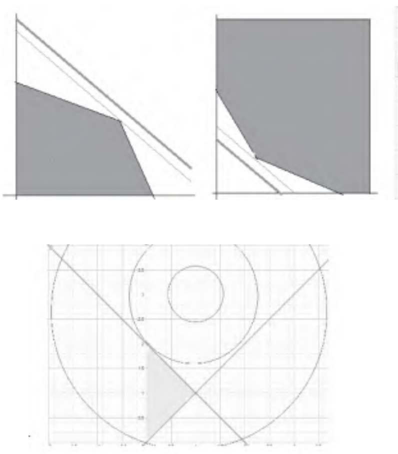
A geometriai megoldása a feltételeknek az alsó egyenes feletti és az felső egyenes alatti félsíkok közös halmaza, ami egy sáv, ezek a feltételek, ami egy egyszer egy órás időintervallum négyzetéből vágatik ki.



4. ábra: A két fiatal találkozásának lehetséges feltétele a kompakt mező, ami az 1x1 négyzet része (saját szerkesztés)

Az összlehetőség az egész egységnyi terület 1x1=1 része: $1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$, a találkozás esélye $P = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9}$, tehát csak $55{,}55\bar{5}$ százalékos.

S ha már feltételekről beszélünk, meg kell, hogy említsük a feltételes optimalizálást. Ennél a módszernél pedig a félsíkok és a pozitív tengelyek által bezárt síkrész adja a feltételek halmazát (satírozott részek az 5. ábrán). Ha a feltételek halmazából kivett számpárosokat vizsgáljuk a fő függvény szempontjából, akkor az alakzatokhoz a fő függvény párhuzamosaival közelítünk felülről, ha maximális nyereséget szeretnénk elérni, ha minimális veszteséget és kiadást, akkor a jobb oldali ábrán látható minta szerint közelítünk a termelési függvény párhuzamosaival a feltételek közös halmazához (Sydsaeter, 2006).



5. ábra: Fent balra egy maximális értéket, jobbra minimális értéket kapunk, párhuzamos egyenesek közelítésével. Lent a közös halmazhoz koncentrikus körökkel közelítünk (szerkesztés: saját ötletek alapján)

Geometriai úton megállapítható a vállalkozók mozgástere is. Ezt a termelés által kialakított legalsó nem átléphető szinttel tudjuk behatárolni. Ha egy termelési függvény az alábbi egyenlettel írható le: $5xy - x^2 - 3y^2$, akkor a marginális összetevőire pedig a deriváltjaik egyenlőtlenségeit kell megvizsgálni: $MPD_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 5y - 2x$ és $MPD_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 5x - 6y$, amelyek nullával való egyenlőségüknél egyeneseket adnak. Mivel a fenntarthatóság szempontjából a ≥ jelet kell alkalmazni, így ismét félsíkokról van szó. A megoldás a két félsík közös halmaza, a korridor, ami egyfajta GPS-ként szerepelhet a vállalkozói szférában. Az egyenlőtlenségek $5y - 2x \ge 0$ és $5x - 6y \ge 0$ félsíkokkal vannak ábrázolva, egy monopolista pedig az ár és mennyiség függvényében diktálhat $P_1 = 40 - Q_1$; $P_2 = 30 - Q_2$; a nyereség pedig $\pi = P_1Q_1 + P_2Q_2 - 6C = 40Q_1 - Q_1^2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 6Q_1 - 6Q_2$, ami teljes négyzetté való alakításakor nem más, mint két kör. Ha pedig a két kör belsejét ábrázoljuk a pozitív síknegyedben és közelítünk a fő függvény párhuzamosaival, geometriai úton megkaphatjuk az optimumot (Fecenko, 2004).

6. ábra: A 0,83 és 0,4 iránytényezőjű egyenesek közé beékelt korridor, két kör belseje és a pozitív síknegyed közös halmaza, közelítve a termelési függvény párhuzamosaival (saját szerkesztés)

BEFEJEZÉS

Nagyon sokan életük későbbi szakaszában döbbennek csak rá, milyen fontos megalapozni a szemléltetést már az óvodában. Az ollózásoknak, kivágásoknak óriási a szerepük. A későbbiekben már nem ollózunk, hanem csak elképzeljük, méretarányosan rajzoljuk a feladatokat, tologatjuk a párhuzamosokat, nagyítjuk és kicsinyítjük a köröket. Ki hitte volna, hogy ilyen nagy jelentőséggel bír a színes papír az oviban, a vonalzó és körző az alap- és középiskolákban. A geometriai kézügyességet pedig kamatoztatni lehet a számelméletben a valós és komplex számok megértésénél, a feltételes optimalizálásnál a közgazdasági jellegű példáknál, a vállalkozói korridor meghatározásánál (amiből veszélyes kilépni, mert jön az végrehajtó), valamint a statisztikában is. Csak a végtelen az, ami nem szemléltethető, de a fizikusok szerint a való világban nincs is értelme ezzel foglalkozni.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Jozef Fecenko – Katarína Sakálová (2004): *Matematika 2.* Bratislava, Iura Edition.
- Ferenczi J. (1887): *Előiskola a Hamilton-féle Quaterniók elméletéhez.* Nyitra, Schumpek Ede és Huszár István Nyomda.
- Milan Hamala (1972): *Nelineárne programovanie,* Bratislava, Alfa.
- Sabine Hossenfelder (2019): *Fizikusok útvesztőben.* Budapest, Park Könyvkiadó.
- Knut Sydsaeter – Peter I. Hammond (2006): *Matematika közgazdászoknak.* Budapest, Aula.
- Nagyová Lehocká Zuzana (2021): *Záhadný svet čísel: Budovanie množiny reálnych čísel.* Nitra, UKF.
- Szenes Adolf (1931): *Mennyiségtan,* Budapest, Franklin Társulat.
- Marta Vrábelová – Dagmar Markechová (2001): *Pravdepodobnosť a* štatistika. Nitra, UKF.