A KATEDRA-VERSENYEK
FŐ SZERVEZŐJE
a Katedra folyóirat

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

A 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI — HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

II–56–1. feladat:
Az 50 darab szám összege 50 · 144,5 = 7225. A két számot elhagyva a számok összege 48 · 150 = 7200 lesz. A két elhagyott szám összege ezért 7225 – 7200 = 25. A két elhagyott szám tehát a **12** és a **13**.

II–56–2. feladat:
a) A kód a számjegyek szorzata. Mivel EDE = 7, tehát E · D · E = 7, ezért **E = 1** és **D = 7**. EMESE = 6, azaz E · M · E · S · E = 6, vagyis 1 · M · 1 · S · 1 = 6, ezért M · S = 6. Ez csak két esetben lenne lehetséges: ha M = 2 és S = 3, vagy fordítva: M = 3 és S = 2. Mivel a REMETE kódja páratlan, azért az M nem lehet páros. Vagyis **M = 3** és **S = 2**. Helyettesítsük be az ismert értékeket a REMETE szóba! R · 1 · 3 · 1 · T · 1 = 3 · R · T = 165. Ebből **R · T = 55**. Tehát **R = 5** és **T = 11** vagy **R = 11** és **T = 5**. Mindkét megoldás helyes.
b) Lényegtelen, hogy az R = 5 és T = 11 vagy R = 11 és T = 5 megoldásból indulunk ki, hiszen az a lényeg, hogy R · T = 55. A DEMETER kódja tehát: 7 · 1 · 3 · 1 · T · 1 · R = 21 · (T · R), vagyis 21 · 55 = 1155.
c) Az ESZTER kódja: 1 · 2 · Z · T · 1 · R = 2 · Z · (T · R) = 2 · Z · 55 = Z · 110. A legkisebb, eddig fel nem használt számjegy a 4, tehát **Z = 4,** az ESZTER kódja 4 · 110 = **440**.
d) **Igen**, hiszen – például – a REMETE és a TEREM szónak egyaránt 165 a kódja, de az ESZTER és a RETESZ kódja is megegyezik (440).

II–56–3. feladat:
a) Az építményben most 20 kis kocka van. Ha az építményt nem akarja megbontani, akkor a nagy kockájának minden éle 4 kiskocka-méretű lesz. Ehhez összesen 4 · 4 · 4 = 64 kis kocka kell. Ezért 64 – 20 = **44** darab kis kockával tudja kiegészíteni egy nagy kockává az építményt.
b) 20 kis kockából nem lehet maradéktalanul kirakni egy nagyobb kockát. Ha csak 2 kiskocka-méretű lenne a nagy kockájának az éle, akkor csak 8 kis kockát használna fel, tehát nagyobb kockát kell építenie. Ha a nagy kocka éle 3 kiskocka-méretű lesz, akkor 3 · 3 · 3 = 27 kis kockára lesz szüksége. Ezért Bencének 7 kis kockával kell kiegészítenie a készletét.
c) Például így: Az első sorban egyedül álló kockát ráteszi a második sor végén álló 1 kockára. Így először ezt az építményt kapja:

3	**2**	**3**
2	**2**	**2**
3	**3**	

Ezt követően a készletből kivesz 7 kockát, és ezeket úgy helyezi el, hogy minden oszlopban pontosan 3 kis kocka legyen.

VII–VIII–IX. OSZTÁLY

II–7–1. feladat:

1. tag:	17
2. tag:	$5 \cdot 17 + 1 = 86$
3. tag:	$86 : 2 = 43$
4. tag:	$43 \cdot 5 + 1 = 216$
5. tag:	$216 : 2 = 108$
6. tag:	$108 : 2 = 54$
7. tag:	$54 : 2 = 27$
8. tag:	$27 \cdot 5 + 1 = 136$
9. tag:	$136 : 2 = 68$
10. tag:	$68 : 2 = 34$
11. tag:	$34 : 2 = 17$

A 11. tag megegyezik az 1. taggal, ezért a 12. tag egyenlő lesz a másodikkal, a 13. a harmadikkal stb. A számsor elemei tehát tízesével ismétlődnek. Egy-egy ilyen tízes csoportban a számok összege 789. Mivel 2020-ig 2020 : 10 = 202 ilyen csoport van, ezért 2020-ig a tagok összege 202 · 789 = 159 378. A 2021. tag 17, a 2022. tag 86, a 2023. tag pedig 43. Ezek összege 146. Az összes tag összege tehát 159 378 + 146 = **159 524**.

II–78–2. feladat: Ha a kisebb kocka éle *a* cm, a nagyobb kocka éle pedig *b* cm, akkor

$$8 \cdot a \cdot a \cdot a = b \cdot b \cdot b$$
$$(2\,a) \cdot (2\,a) \cdot (2\,a) = b \cdot b \cdot b$$

Ebből látható, hogy $b = 2a$, tehát a nagyobb kocka élei kétszer akkorák, mint a kisebb kockáéi. A kisebb kocka felszíne: $F_1 = 6 \cdot a \cdot a$, a nagyobb kockáé: $F_2 = 6 \cdot 2a \cdot 2a = 24 \cdot a \cdot a$. A két felszín különbsége 162 cm^2, tehát:

$$24 \cdot a \cdot a - 6 \cdot a \cdot a = 162$$
$$18 \cdot a \cdot a = 162$$
$$a \cdot a = 162 : 18$$
$$a \cdot a = 9$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $a = 3$ cm, és $b = 6$ cm. A kis kocka élének hossza tehát **3 cm**, a nagy kockáé pedig **6 cm**.

A beolvasztott téglatest térfogata a 6 cm élű nagy kocka és a 3 cm élű kis kocka térfogatának különbsége: $6 \cdot 6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216 - 27 = 189$ cm^3. Mivel $189 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, ezért az alábbi téglatest-méretek jönnek számításba.

$$\mathbf{1 \times 1 \times 189}$$
$$1 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7) = \mathbf{1} \times \mathbf{3} \times \mathbf{63}$$
$$1 \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7) = \mathbf{1} \times \mathbf{9} \times \mathbf{21}$$
$$1 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 7 = \mathbf{1} \times \mathbf{27} \times \mathbf{7}$$
$$3 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 7) = \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{21}$$
$$3 \cdot (3 \cdot 3) \cdot 7 = \mathbf{3} \times \mathbf{9} \times \mathbf{7}$$

A feladatnak tehát 6 megoldása van.

II–789–3. feladat:

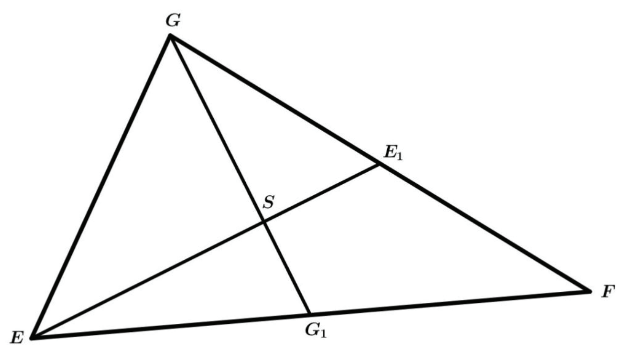
A keresett szám $\overline{2023AB}$ alakú, ahol A nem feltétlenül különbözik B-től. Ha egy szám osztható 33-mal, akkor osztható 11-gyel és 3-mal is. Egy szám akkor osztható 11-gyel, ha a páratlan helyeken álló számjegyei összegének és a páros helyeken álló számjegyei összegének különbsége osztható 11-gyel. A páratlan helyeken álló számjegyek összege $2 + 2 + A = A + 4$. A páros helyeken álló számjegyek összege $0 + 3 + B = B + 3$. Ezek különbsége $A - B + 1$. Az $A - B + 1$ értéke sohasem lehet 11 vagy -11, mert két számjegy különbsége nem lehet 10. Ezért $A - B + 1 = 0$, vagyis $A - B = -1$. Készítsünk táblázatot az A és B lehetséges értékeiről!

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B	1	2	3	4	5	6	7	8	9

A $\overline{2023AB}$ alakú szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. A számjegyek összege $2 + 2 + 3 + A + B = A + B + 7$. Az adott szám akkor lesz osztható 3-mal, ha az $A + B + 7$ összeg értéke 9, 12, 15, 18, 21 vagy 24 lesz, vagyis ha az $A + B$ értéke rendre 2, 5, 8, 11, 14 vagy 17 lesz. A fenti táblázatból azonban látható, hogy az A és B összege sohasem lesz páros. Vagyis a megoldást azok az $[A; B]$ számpárok adják, ahol a két szám értéke 5, 11 vagy 17.
Ha $A + B = 5$, akkor **A = 2 és B = 3**.
Ha $A + B = 11$, akkor **A = 5 és B = 6**.
Ha $A + B = 17$, akkor **A = 8 és B = 9**.

A feladatnak tehát három megoldása van: **202323**, **202356** és **202389**.

II–89–4. feladat:



A súlypont a súlyvonalat 1 : 2 arányban osztja két részre. Ezért: ha $s_e = EE_1 = 15$ cm, akkor $ES = 10$ cm és $SE_1 = 5$ cm. Hasonlóan: ha $GG_1 = 12$ cm, akkor $GS = 8$ cm és $SG_1 = 4$ cm.

$$T_{EG_1S} = \frac{ES \cdot SG_1}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ cm}^2;$$
$$T_{ESG} = \frac{ES \cdot SG}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ cm}^2.$$

Ebből: $T_{EG_1G} = T_{E_1GS} + T_{ESG} = 20 + 40 = 60$ cm². Mivel a súlyvonal a háromszöget két egyenlő területű háromszögre bontja, ezért az EFG háromszög területe az $EG'G$ háromszög területének kétszerese, tehát **120 cm²**.

II–9–5. feladat:

Az *EPF* szög a *PFG* háromszög külső szöge. Tudjuk, a külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével, tehát $|PGF\angle| + |GFP\angle| = |EPF\angle|$. Mivel a *PGF* szög azonos az *EGF* szöggel, ezért $|GFP\angle|$ = 110° – 85° = 25°. Ebből a *PFG* háromszög egyértelműen megszerkeszthető (a *szosz*-tétel alapján). Az *E* pont a *GP* félegyenesen fekszik, és $|EG|$ = 9 cm. A trapéz *HG* alapja párhuzamos az *EF* alappal, tehát a trapéz *H* csúcsa illeszkedik arra az egyenesre, amely a *G* ponton áthaladva párhuzamos az *EF* egyenessel. Ugyanakkor a *G* csúcs rajta van az *FP* félegyenesen is. A feladatnak egyetlen megoldása van.