A KATEDRA-VERSENYEK
FŐ SZERVEZŐJE
a Katedra folyóirat

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

A 3. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

III–5–1. feladat:
Ha a téglalap 3 darab a oldalú négyzetre vágható szét, akkor a téglalap rövidebb oldala a cm, a hosszabbik oldala pedig $3a$ cm, ezért a kerülete $8a$ cm. Ha $8a = 360$, akkor $a = 360 : 8 = 45$ cm. 1 négyzet területe ezért $45 \cdot 45 = 2025$ cm², a téglalap területe pedig $3 \cdot 2025 =$ **6075 cm**.
Vagy: A téglalap területe $45 \cdot (3 \cdot 45) = 45 \cdot 135 =$ **6075 cm²**.

III–56–2. feladat:
Ha a tízesek oszlopából nem lenne átlépései maradék, akkor a D + A összeg értéke 2 lenne. Mivel A ≠ 0, ez csak akkor jöhetne ki, ha D = 0 és A = 2 lenne. De ha a D értéke 0 lenne, akkor a százasok oszlopában a C és a 0 összege C lenne, nem pedig E. Tehát D ≠ 0, és ezért D + A = 12, tehát a tízesek oszlopából lesz átlépési maradék. A százasok oszlopában C + D + 1 = „tizenE", tehát innen az átlépési maradék 1. Ezért **C = 1**. A százasok oszlopában ezek után C + D + 1 = 1 + D + 1 = D + 2. Mivel innen van átlépési maradék, ezért D + 2 > 9, tehát a D értéke csak 8 vagy 9 lehet. Ha D = 9 lenne, akkor a tízesek oszlopából következtetve az A értéke csak 3 lehetne, és akkor a részszorzatok 193 alakúak lennének, de ez a részszorzat úgy keletkezik, hogy az AB számot megszorozzuk 3-mal. Ám a 193 nem osztható 3-mal. Tehát D ≠ 9, ezért **D = 8**. Mivel D + A = 12, ezért **A = 4**. A részszorzatok értéke tehát 184, amit úgy kaptunk meg, hogy az AB-t szoroztuk 4-gyel. Ebből AB = 184 : 4 = 6, tehát **B = 6**. A szorzást elvégezve kapjuk, hogy **E = 0**. A feladat megoldása az alábbi szorzás:

$$\begin{array}{r} \mathbf{46} \\ \cdot\ \mathbf{44} \\ \hline \mathbf{184} \\ \mathbf{184} \\ \hline \mathbf{2024} \end{array}$$

III–56–3. feladat:
Egy számnak és a negyedének összege ugyanannyi, mint a negyedének ötszöröse. Ezért egy számnak és negyedének összege akkor lesz legalább 100, ha a szám ötszöröse legalább 400. 400 : 5 = 80, tehát a legkisebb ilyen szám a 80. (Ellenőrzés: 80 + 80 : 4 = 80 + 20 = 100.) A további kétjegyű számoknak is oszthatóknak kell lenniük 4-gyel.
A feladat megoldásai tehát a **80, 84, 88, 92** és **96**.

III–6–4. feladat: Jelöljük Vince számait *a*-val, *b*-vel és *c*-vel. Vince számítása:

$$a \cdot b + c.$$

Zsófi számai 1-gyel nagyobbak: $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$. Zsófi számítása ezért:

$$(a + 1) \cdot (b + 1) + c + 1.$$

A két műveletsor különbsége 14:

$$\begin{aligned}(a+1)\cdot(b+1)+c+1-(a\cdot b+c)&=14\\ ab+b+a+1+c+1-ab-c&=14\\ a+b+2&=14\\ a+b&=12\end{aligned}$$

Látható, hogy a *c* értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. Az *a* és *b* értékeit az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Az *a* és *b* értékeit tehát 13-féleképpen, a *c* értékeit végtelen sokféleképpen választhatjuk meg.

VII–VIII–IX. OSZTÁLY

III–7–1. feladat:
A feladat feltételei értelmében A ≠ 0, B ≠ 0, D ≠ 0. Mivel a harmadik részszorzatban A · ABC = ABC, ezért **A = 1**.
ABC < 150, mert 150 · 150 = 22 500 lenne, pedig a szorzat első számjegye 1. Ezért B < 5, tehát B = 2 vagy B = 3 vagy B = 4. A tízesek oszlopában B + E = B, de B ≠ 0, ezért **E = 0**. A második részszorzat: 1BC · B = BC0. Ez csak akkor következhet be, ha a B vagy a C értéke 5. De tudjuk, hogy B < 5, ezért **C = 5**.
Ha a második részszorzatban 1B5 · B = B50, akkor a B értéke csak 2 vagy 4 lehet. A B = 4 esetben azonban ellentmondáshoz jutunk, mert 145 · 4 = 580, mert a B értéke 5 lenne. Ezért **B = 2**. A feladatnak tehát 1 megoldása van: **A = 1, B = 2, C = 5, D = 6** és **E = 0**.

$$\begin{array}{r} \mathbf{1\,2\,5} \\ \cdot\ \mathbf{1\,2\,5} \\ \hline \mathbf{6\,2\,5} \\ \mathbf{2\,5\,0} \\ \mathbf{1\,2\,5} \\ \hline \mathbf{1\,5\,6\,2\,5} \end{array}$$

Megj.: Két egyenlő, 5-re végződő szám szorzata mindig 25-re végződik, tehát a C = 5 ismeretében közvetlenül is kijelenthető, hogy B = 2.
III–78–2. feladat: 20232024 = 2 · 2 · 2 · 3 · 29 · 41 · 709. 3 darab 2-es, 1 darab 3-as, 1 darab 29-es, 1 darab 41-es és 1 darab 709-es prímtényező van a szorzatban. Ezért az osztók száma:

$$(3 + 1) \cdot (1 + l) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$$

Ezért a 20232024-nek **64** darab osztója van.

III–789–3. feladat:

a) Páratlan számú egymást követő természetes szám összegét úgy számíthatjuk ki, hogy a középső számot megszorozzuk az összeadandók számával. 679 = 7 · 97, ezért vagy 7 egymást követő számról, vagy 97 darab egymást követő számról van szó. A 97 egymást követő szám nem ad megoldást, mert a számegyenesen a 7-től balra nem találunk 48 darab természetes számot. Ha 7 darab számot adunk össze, akkor ezek közül a középen álló szám a 97. A keresett összeg:

94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100

b) Páros számú egymást követő szám összege is lehet 679. Ennek feltétele, hogy a 679-et a darabszámmal elosztva egy olyan tizedestörtet kapjunk, amely „valamennyi egész 5 tized" alakú legyen, hiszen csak ebben az esetben lenne néhány bal oldali és ugyanannyi jobb oldali természetesszám-szomszédja. Ez a mi esetünkben csak akkor teljesülhet, ha a 679-et 2-vel, (2 · 7) = 14-gyel vagy (2 · 97) = 194-gyel osztjuk. 672 : 2 = 339,5. A két keresett szám tehát a 679-et 2-vel osztva a **339** és a **340-et** kapjuk. További megoldások: 679 : 14 = 48,5. Ez azt jelenti, hogy a 48,5 előtt álló 7 számot adjuk össze a 48,5 után álló 7 számmal:

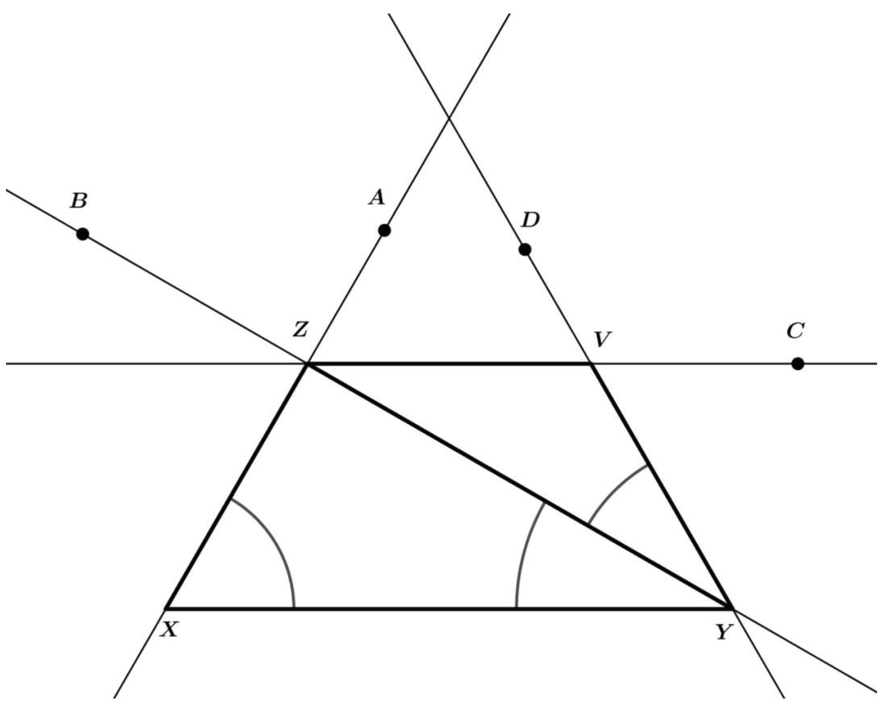
42 + 43 + 44 + ... 53 + 54 + 55

A 679-et 194-gyel elosztva nem kapunk újabb megoldást, mert 649 : 194 = 3,5, de a számegyenesen a 3,5-től balra nem találunk 97 darab természetes számot.
A feladatnak tehát három megoldása van:

94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100
339 + 340
42 + 43 + 44 + ... 53 + 54 + 55

III–8–4. feladat:

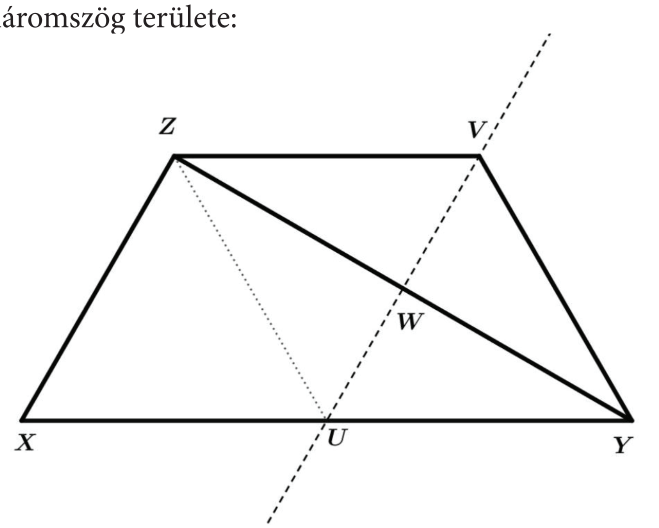
Az *XYZ* háromszög egy olyan derékszögű háromszög, amelynek *XZ* a egyik befogója, *XY* pedig az átfogója. Mivel az *XZ* befogó hossza az *XY* átfogó hosszának a fele, ezért egy különleges háromszöggel van dolgunk, amelynek a hegyesszögei 30 és 60 fokosak. Tehát $|ZXY\angle| = 60°$, $|XYZ\angle| = 30°$.
A $|ZV| = |VY|$ feltételből következik, hogy a *ZVY* háromszög egyenlő szárú, tehát $|VZY\angle| = |VYZ\angle|$. A *VZY* szög az *XYZ* szög váltószögpárja, ezért $|VZY\angle| = |VYZ\angle| = 30°$.



A szerkesztés menete:

1.) XY; $|XY| = 8$ cm
2.) $XA\rightarrow$; $|AXY\angle| = 60°$
3.) $YB\rightarrow$; $|BYX\angle| = 30°$
4.) Z; $Z \in XA\rightarrow \cap YB\rightarrow$
5.) $XYZ\Delta$
6.) $ZC\rightarrow$; $ZC\rightarrow \parallel XY$
7.) $YD\rightarrow$; $|DYZ\angle| = 30°$
8.) V; $V \in ZC\rightarrow \cap YD\rightarrow$
9.) $XYVZ$ trapéz

III–9–5. feladat: Az XZY háromszög egy olyan derékszögű háromszög, amelynek XZ a egyik befogója, XY pedig az átfogója. Mivel az XZ befogó hossza az XY átfogó hosszának a fele, ezért egy különleges háromszöggel van dolgunk, amelynek a hegyesszögei 30 és 60 fokosak. Tehát $|ZXY\angle| = 60°$, $|XYZ\angle| = 30°$. Az XZY derékszögű háromszög területe:



$$T_{XZY} = \frac{|XZ| \cdot |ZY|}{2}$$

Pitagorasz tételéből:

$$|ZY| = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$$
$$|ZY| = \sqrt{4a^2 - a^2}$$
$$|ZY| = \sqrt{3a^2}$$
$$|ZY| = a \cdot \sqrt{3}$$

Ebből az XYZ háromszög területe:

$$T_{XZY} = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2}$$
$$T_{XZY} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A $|ZV| = |VY|$ feltételből következik, hogy a ZYV háromszög egyenlő szárú, tehát a V csúcsból a ZY szakaszra bocsátott $VU \equiv VW$ merőleges ennek a háromszögnek nemcsak magasságvonala, hanem oldalfelezője (és súlyvonala) is. Ugyanakkor: mivel a VU egyenes és a ZX egyenes is merőleges a ZY egyenesre, azért $VU \parallel ZX$. Ezért $|VU| = |XZ| = a$. Az $UYVZ$ négyszög rombusz, mert átlói merőlegesek egymásra, és szomszédos oldalai is egybevágók. (Ebből az is következik, hogy az $XYVZ$ trapéz egyenlő szárú, és hogy az UYV háromszög szabályos, de ezt a levezetésünkben nem kell felhasználni.) Az egyenlő szárú ZYV háromszög alapja a ZY szakasz, magassága pedig a WV szakasz, ami feleakkora hosszúságú, mint az XZ szakasz. Tehát $|WV| = \dfrac{a}{2}$. A ZYV háromszög területe ezért:

$$T_{ZYV} = \frac{|ZY| \cdot |WV|}{2}$$

$$T_{ZYV} = \frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}}{2}$$

$$T_{ZYV} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Az $XYVZ$ trapéz területe az XYZ és a ZYV háromszög területének összege:

$$T_{XYVZ} = T_{XYZ} + T_{ZYV}$$

$$T_{XYVZ} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$T_{XYVZ} = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{3} + a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$T_{XYVZ} = 3a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

III–9–6. feladat:

2024 = 2 · 2 · 2 · 11 · 23

a) Egy négyzetszám prímtényezős felbontásában az egyes prímtényezőknek páros sokszor kell előfordulniuk. A 2024-ből ily módon kapható legkisebb négyzetszám:

2 · 2 · 2 · **2** · 11 · **11** · 23 · **23** = 1 024 144 (= 1012^2)

A 2024-et tehát 2 · 11 · 23 = **506**-tal kell megszorozni, hogy négyzetszámot kapjunk.

b) Egy köbszám prímtényezős felbontásában egy-egy prímszám 3-szor, 6-szor, 9-szer... fordul elő, ezért a 2024-ből így kapjuk meg a lehető legkisebb köbszámot:

2 · 2 · 2 · 11 · **11** · **11** · 23 · **23** · **23** = 129 554 216 (= 506^3)

A 2024-et 11 · 11 · 23 · 23 = **64 009**-cel kell megszorozni, hogy köbszámot kapjunk.