A KATEDRA-VERSENYEK
FŐ SZERVEZŐJE
a Katedra Polgári Társulás

KATEDRA-VERSENY

További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk AZONOSÍTÓ SZÁM: 2022001

I. FORDULÓ MEGOLDÁSAI — HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) [H. G.] ÉS PÓCSIK BÉLA, NYITRACSEHI [P. B.] FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

I–5–1. feladat:
Ha a középső számjegy 0 → **100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900** (9 megoldás)
Ha a középső számjegy 1 → **111** (1 megoldás)
Ha a középső számjegy 2 → **122, 221** (2 megoldás)
Ha a középső számjegy 3 → **133, 331** (2 megoldás)
Ha a középső számjegy 4 → **144, 242, 441** (3 megoldás)
Ha a középső számjegy 5 → **155, 551** (2 megoldás)
Ha a középső számjegy 6 → **166, 263, 362, 661** (4 megoldás)
Ha a középső számjegy 7 → **177, 771** (2 megoldás)
Ha a középső számjegy 8 → **188, 284, 482, 881** (4 megoldás)
Ha a középső számjegy 9 → **199, 393, 991** (3 megoldás)
Ez összesen 9 + 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 4 + 3 = **32** megoldás. [H. G.]

I–56–2. feladat: Az egyesek oszlopában öt egyenlő számjegy van. Ezek nem lehetnek párosak, mert öt darab egyenlő páros szám összege nullára végződne, és a feladat feltételei értelmében egyik betű értéke sem lehet nulla. Egy páratlan szám ötszöröse 5-re végződik, tehát **D = 5**. Mivel a tízesek oszlopából csak 1 vagy 2 lehet az átlépési maradék, ezért a C értéke csak 3 vagy 4 lehet. Az A értéke elméletileg 1, 3, 5, 7 vagy 9 lehet. Ha A = 1, akkor nem lenne átlépési maradék, tehát ebben az esetben a B szám háromszorosának 5-re kell végződnie. Ez akkor lenne lehetséges, ha a B értéke 5 lenne, de ez a szám már foglalt. Ezért A ≠ 1. Ha az A értéke 3 lenne, akkor az átlépési maradék 1 lenne, tehát ebben az esetben a (3 · B + 1)-nek kellene 5-re végződnie. Ez csak akkor következik be, ha B = 8. Ám ebben az esetben a tízesek oszlopából 2 lenne az átlépési maradék, és ezért a C értéke is 3 lenne. Tehát A ≠ 3. Ha A értéke 7 lenne, akkor az egyesek oszlopából 3 lenne az átlépési maradék, és a B értékének 4-nek kellene lennie, de ebben az esetben a C értéke is 4 lenne. Vagyis: A ≠ 7. Ha **A = 9**, akkor az egyesek oszlopából 4 az átlépési maradék, és ezért **B = 7**, és ebből **C = 3**. A megoldás tehát: **A = 9**, **B = 7**, **C = 3** és **D = 5**. [P. B.]

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \mathbf{9} \\
 & & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\
 & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\
 & & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\
+ & & & \mathbf{9} \\
\hline
 & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5}
\end{array}$$

I–56–3. feladat: A nem látható számok közül a 8-assal szemközti a legkisebb, az 5-össel szemben ennél 3-mal nagyobb, a 4-essel szemben ennél 4-gyel nagyobb szám helyezkedik el. Keressük meg táblázat segítségével ezeket a számokat!

A táblázatban áthúztuk azokat a számokat, amelyek nem felelnek meg annak a feltételnek, hogy a lapokon különböző számok szerepelnek. Látható, hogy ilyen feltételek mellett a feladatnak csak egy megoldása van: a 8-assal szemben a **3-as**, az 5-össel szemben a **6-os**, a 4 essel szemben pedig a **7-es** szám áll. [P. B.]

a 8-assal szemben	0	1	2	3	~~4~~	~~5~~
az 5-össel szemben	3	~~4~~	~~5~~	6	7	~~8~~
a 4-essel szemben	~~4~~	~~5~~	6	7	~~8~~	9

I–6–4. feladat: Ha a téglalap négy négyzetre bontható, akkor a téglalap egyik oldala olyan hosszú, mint a négyzet oldala, a másik oldala pedig 4 négyzetoldallal egyenlő. A téglalap határoló vonala (tehát a kerülete) 10 négyzetoldalból tevődik össze. Ha ennek hossza 90 cm, akkor a négyzet oldala 90 : 10 = 9 cm. A téglalap területe a négy négyzet területének összege. Egy négyzet területe 9 · 9 = 81 cm^2, a téglalap területe ezért 4 · 81 = **324 cm^2**. (Vagy: a téglalap egyik oldala 9 cm, másik oldala 9 · 4 = 36 cm, ezért a területe 9 · 36 = **324 cm^2**.) [H. G.]

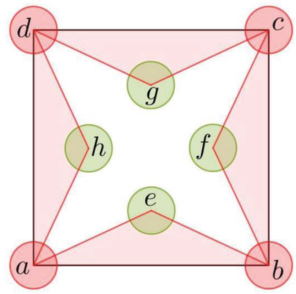
VII–VIII–IX. OSZTÁLY

I–78–1. feladat:
Próbálkozzunk egyetlen számjegy kihúzásával! Ha az 1-est húzzuk ki, nem kapunk 11-gyel osztható számot. Hasonlóan járunk ha a nullák valamelyikét húzzuk ki: sem a 2212022, sem a 2021222 nem osztható 11-gyel. Ha egy 2-est húznánk ki, akkor a megmaradt számjegyek összege 9 lenne, és ezeket bárhogy csoportosítanánk, a két összeg különbsége 11 nél kisebb páratlan szám lenne, tehát sohasem lenne nulla.
Ezért legkevesebb két számjegyet kell kihúznunk, és – mivel a páratlan helyeken álló számjegyek összegének és a páros helyen álló számjegyek összegének különbsége semmiképp sem lehetne 11 (vagy –11) – az egyik kihúzott számjegy az 1 lesz. A megmaradt számjegyek közt öt darab 2-es van. Ezeket bárhogy is csoportosítanánk, a két csoport különbsége semmiképp nem lehetne nulla. Ezért a másik kihúzott számjegy egy 2-es lesz. A 2022022 számból akár az egyesek, akár a tízesek helyén álló 2-est húzzuk ki, a **202202** számot kapjuk, amely osztható 11-gyel. (A tízezresek vagy a százezresek helyén álló 2-es kihúzásával kapott 202022 nem osztható 11-gyel.)

202202 = 2 · 7 · 11 · 13 · 101, tehát ennek a számnak 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = **32 osztója** van. [H. G.]

I–789–2. feladat: Mivel a második szám Pisti beavatkozása után 1-esre fog végződni, ezért az első szám csak akkor lehet a második 37-szerese, ha az átalakított első szám 7-esre végződik. 1 000 és 10 000 között nem találunk ilyen számot. A 100 000 fölött találunk már olyan számokat, amelyek a 37 többszörösei: az egyik megoldás a 100 307. Az első szám ebben az esetben a **307** volt a táblán. A második számot úgy kapjuk meg, hogy a 100 307-et elosztjuk 37-tel, és a hányadosból elhagyjuk az utolsó egyest: 100 307 : 37 = 2 711, a második szám tehát a **271** volt a táblán. A második megoldás a 100 677-ből vezethető le. 100 677 : 37 = 2721. Ebben az esetben az első szám a **677** volt, a második pedig a **272**. [P. B.]

I–789–3. feladat: Jelöljük a körökbe kerülő számok közül a négyzet csúcsaiba kerülő számokat *a, b, c, d* betűkkel, a háromszögek fennmaradó csúcsaiba kerülőket pedig az ábrán látható módon *e, f, g, h* betűkkel!



A nyolc szám összege 36. A feladat feltételei alapján:

$$a + b + c + d = a + b + e$$

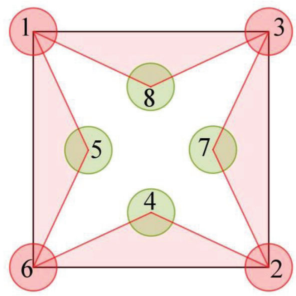
Ebből: $c + d = e$. Hasonlóan kapjuk, hogy $a + d = f$, $a + b = g$ és $b + c = h$. Ebből:

$$e + f + g + h = 2a + 2b + 2c + 2d$$
$$e + f + g + h = 2(a + b + c + d)$$

Az $a + b + c + d + e + f + g + h = 36$ összegben írjuk az $e + f + g + h$ helyébe a $2(a + b + c + d)$ kifejezést:

$$3(a + b + c + d) = 36$$
$$a + b + c + d = 12$$

Ebből az is következik, hogy $e + f + g + h = 24$, és hogy a számok összege egy-egy háromszögben is 12. A 12-es összeget négy szám összegeként csak egyféleképpen tudjuk felírni: 1 + 2 + 3 + 6. A 12-es összeget három számból hatféleképpen tudjuk előállítani: 1 + 3 + 8; 1 + 4 + 7; 1 + 5 + 6; 2 + 3 + 7; 2 + 4 + 6 és 3 + 4 + 5, de ezekből csak azok tartozhatnak egy-egy háromszöghöz, amelyek az {1, 2, 3, 6} számokból legalább kettőt tartalmaznak. Ezért eltekinthetünk az 1 + 4 + 7 és a 3 + 4 + 5 összegektől. A megmaradt {1, 3, 8}, {1, 5, 6}; {2, 3, 7} és {2, 4, 6} számhármasok egy-egy háromszöghöz fognak tartozni. Egy lehetséges megoldás [P. B.]:



I–9–4. feladat: Ottó születési évszáma $\overline{19xy} = 1900 + 10x + y$ alakú, ezért 1959-ben

$$1959 - (1900 + 10x + y) = 59 - 10x - y$$

éves volt. A születési évszámában szereplő számjegyek összege:

$$1 + 9 + x + y,$$

tehát:

$$1 + 9 + x + y = 59 - 10x - y$$
$$11x = 49 - 2y$$

A $49 - 2y$ kifejezés tehát a 11 többszöröse, miközben x is, y is egyjegyű szám. Mivel a $2y$ páros, ezért a $49 - 2y$ páratlan. Ezért a 11 páratlan, de 49-nél kisebb többszöröseit keressük. Ennek a feltételnek csak a 11 és a 33 felel meg. Ha a $49 - 2y$ értékének 11-et választanánk, akkor y értékéül 19-et kapnánk, ami nem felel meg a feltételnek, hiszen y egyjegyű szám. Ha $49 - 2y = 33$, akkor $y = 8$ és $x = 3$. Tehát Ottó **1938**-ban született. [P. B.]