A KATEDRA-VERSENYEK FŐ SZERVEZŐJE
a Katedra Polgári Társulás

KATEDRA-VERSENY

További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk AZONOSÍTÓ SZÁM: 2022001

III. FORDULÓ MEGOLDÁSAI — HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) [H. G.] FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

III–5–1. feladat:
2022 = 224 · 9 + 6, tehát ennek a számnak akkor lesz a legkevesebb számjegye, ha egy darab 6-os után 224 darab 9-est írunk. A keresett szám tehát 225-jegyű.

III–56–2. feladat:
a) Hét egymást követő természetes szám összege a középső (tehát a negyedik) szám hétszeresével egyenlő. A 7-nek a 200-nál kisebb, de a 200-hoz legközelebb eső többszöröse a 7 · 28 = 196. Samu herceg tehát összesen **196** fejet vágott le.
b) Ha hét egymást követő természetes szám összege 196, akkor a számsor negyedik tagja a 196 : 7 = 28. A hét szám tehát a 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Az első ajtót őrző sárkány ezért **25-fejű** volt.
c) A 196 öttel osztva 1 maradékot ad, tehát Samu herceg **nem tudta** ötösével maradéktalanul berakni a sárkányfejeket a ládákba. 196 : 5 = 39, maradt 1. Vagyis: 39 ládát töltött meg teljesen, a negyvenedik ládába már csak 1 fej jutott.

III–56–3. feladat:

x	**374**	y
26		
848		

Jelöljük a felső sor üres mezőit x-szel és y-nal!
848 + 26 = 374 + y, azaz y = 500. A bűvös négyzet közepén levő szám ezért $\frac{848+500}{2} = 674$.
Ebből a bűvös összeg 674 · 3 = 2022. Ennek ismeretében már könnyedén kitölthető a bűvös négyzet. A megoldás:

1148	**374**	**500**
26	**674**	**1322**
848	**974**	**200**

III–6–4. feladat:
Ha a négytényezős szorzatban van 5-ös, akkor 0-ra fog végződni, hiszen a négy tényező között mindig van páros szám is. Ha nincs benne 5-ös, akkor 4-esre fog végződni. Ennek az a magyarázata, hogy az 5-öst nem tartozó számok vagy 1-re, 2-re, 3-ra és 4-re vagy 6-ra, 7-re, 8-ra és 9-re végződnek, ahol a két első tényező szorzata és a két utolsó tényező szorzata is 2-esre végződik, vagyis a négy tényező szorzata mindig 4-esre végződik. A műveletsorban 2019 darab összeadandó van. A 4-esre végződő szorzatok első tényezője az 1, a 6, a 11, a 16, a 21, a 26 ... a 2011 és a 2016. A 2016 · 2017 · 2018 · 2019 előtti utolsó, nem 4-re végződő szorzat a 2015 · 2016 · 2017 · 2018. 2015 : 5 = 403. Ez azt jelenti, hogy a 2016 · 2017 · 2018 · 2019 a 403 + 1 = 404 olyan szorzat, amely 4-esre végződik. A műveletsorban tehát 404 olyan összeadandó van, amely 4-esre végződik. Mivel 404 · 4 szorzat 6-osra végződik, ezért a műveletsor is **6-osra** fog végződni.

III–7–1. feladat:
Ha egy ilyen téglalap rövidebb oldala b, akkor a négyzet oldala (tehát a téglalap hosszabbik oldala) a b 2021-szerese. A téglalap kerülete ezért $(2021 \cdot b + b) \cdot 2 = 2022 \cdot 2 \cdot b$. A feladat feltételeinek értelmében $4044 \cdot b = 44484$. Ebből $b = 11$ mm és $a = 2021 \cdot 11 = 22231$ mm. A négyzet kerülete ezért $22231 \cdot 4 =$ **88924 mm**.

III–78–2. feladat:
a) Ha a felső lapon levő szám a, akkor alul a $600 - a$ található. Ha a felső számot megszorozzuk 3-mal, és ebből kivonjuk az alsót, akkor egy $3a + 600 - a = 2a + 600$ alakú számot kapunk. Ha $2a + 600 = 1192$, akkor $a = 296$, az alsó szám ekkor 304, hasonló módon kapjuk a további számokat: 415, 185, 321, 279. A kocka egyes lapjaira tehát a **296**, **415**, **321**, **304**, **185** és **279** számokat írtuk.
b) Ha az összeg 1192, akkor a kocka felső lapján a 296 látható, ha az összeg 1430, akkor a felső lapon 415, ha az összeg 1242, akkor a felső lapon 321 látható. A hiányzó összegeket úgy kapjuk meg, hogy a 304, 185, 279 számokat behelyettesítjük a $2a + 600$ kifejezésbe. A hiányzó összegek tehát: **1208**, **970** és **1158**.

III–789–3. feladat:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\dots\frac{1}{2021}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\dots\frac{2}{2021}\right)+\dots+\left(\frac{2019}{2020}+\frac{2019}{2021}\right)+\frac{2020}{2021}=$$

Hagyjuk el a zárójeleket, és csoportosítsuk úgy az összeadandókat, hogy az egyenlő nevezőjű törtek egymás mellé kerüljenek:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\dots+\frac{1}{2021}+\frac{2}{2021}+\dots+\frac{2019}{2021}+\frac{2020}{2021}=$$

Emeljük ki az 1 számlálójú törteket:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(1+2)+\frac{1}{4}(1+2+3)+\frac{1}{5}(1+2+3+4)+\dots\frac{1}{2021}(1+2+3+4+\dots 2020)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 5}{2}+\dots+\frac{1}{2021}\cdot\frac{2020\cdot 2021}{2}=$$

Egyszerűsítsünk tagonként az 1 számlálójú törtek nevezőjével: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4+\dots+\frac{1}{2}\cdot 2020=$

Emeljük ki az $\frac{1}{2}$ -et:
$$\frac{1}{2}\cdot(1+2+3+4+\dots 2020)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2020\cdot 2021}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1010\cdot 2021=505\cdot 2021=1\,020\,605$$

Az összeg értéke tehát **1 020 605**.

III–89–4. feladat:
I. megoldás: Jelöljük a piros négyzet területének mérőszámát a-val, a kékét b-vel, a közös részét pedig c-vel!
$a = c + 42$, $c = 0{,}16 \cdot a$ és $c = 0{,}25 \cdot b$.
Ez utóbbiból $b = 4 \cdot c$.

$$\begin{aligned} c &= 0{,}16\cdot(c+42)\\ 100c &= 16c+672\\ 84c &= 672\\ c &= 8 \end{aligned}$$

A lila négyzet területe tehát 8 cm^2, a pirosé $8 + 42 = 50$ cm^2, a kéké pedig $4 \cdot 8 =$ **32 cm^2**.

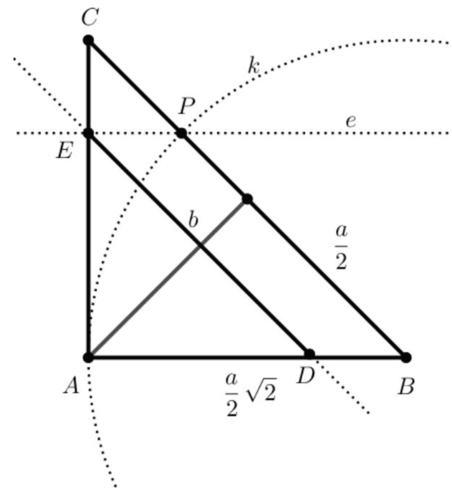
II. megoldás: Ha a lila a pirosnak 16%-a, akkor a lila a pirosnak tulajdonképpen a 4/25-e, ami azt jelenti, hogy a piros a lilának a 25/4-szerese, azaz 6,25-szorosa. Az I. megoldásban alkalmazott jelöléseket felhasználva tehát $a = 6{,}25 \cdot c$, ugyanakkor $a = c + 42$, tehát

$$\begin{aligned} 6{,}25c &= c + 42 \\ 625c &= 100c + 4200 \\ 525c &= 4200 \\ c &= 8 \end{aligned}$$

Ebből $a =$ **50 cm²**.

Ha a lila a kéknek a 25%-a, akkor a kék a lilának 4-szerese, azaz $b =$ **32 cm²**.

III–9–5. feladat:
Az egyenlő szárú, derékszögű háromszögben az alaphoz tartozó magasság feleakkora, mint az alap.



Ha az alapot a-val jelöljük, akkor a háromszög területe $\frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$.

A keresett szakasz a feleakkora területű háromszög alapja lesz. Jelöljük ezt a szakaszt b-vel, ennek a háromszögnek a magassága a b fele lesz, a területe tehát $\frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{b^2}{4}$. A b alapú háromszög területe feleakkora, mint az a alapúé:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} &= 2 \cdot \frac{b^2}{2} \\ a^2 &= 2b^2 \\ b^2 &= \frac{a^2}{2} \\ b &= \sqrt{\frac{a^2}{2}} \\ b &= a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b &= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Tehát a b szakasz hossza az a szakasz hosszának $\sqrt{2}$ -szerese, de tudjuk, hogy az AB (és az AC) szakasz a BC szakasznak épp a $\sqrt{2}$ -szerese. Ezért az AB szakaszt rámásoljuk a BC szakaszra (PB szakasz), és megszerkesztjük azt a paralelogrammát, amelynek egyik oldala PB hosszúságú, másik oldala pedig párhuzamos az AB egyenessel.

A szerkesztés lépései:
1.) $ABC\Delta$; $|AB| = |AC|$; $|CAB\angle| = 90°$
2.) k; $k(B; |AB|)$
3.) P; $P \in BC \cap k$
4.) e; $P \in e$; $e \,||\, AB\leftrightarrow$
5.) E; $E \in AC$; $E \in e$
6.) D; $D \in AB$; $ED \,||\, CB$
Az ED szakasz két egyenlő területű részre osztja az ABC háromszöget.