Egyenlet helyett táblázattal, oszthatósággal

Gyakori versenyfeladat-kérdés: Hány átlója van egy sokszögnek? Nem nehéz rájönni, hogy a sokszög minden csúcsából 3-mal kevesebb átló húzható, mint a csúcsok száma, hiszen „önmagába” egyáltalán nem lehet szakaszt szerkeszteni, a két szomszédos csúcsot összekötve pedig nem átlót, hanem oldalt kapunk. Minden csúcsból tehát $n \cdot (n - 3)$ darab átló húzható, azonban így minden átlót kétszer számoltunk. Az n-szög átlóinak száma ezért:

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Amikor az átlók számát kell kiszámítani, az ötödikesek sem esnek kétségbe. Egy versenyző legtöbbször maga fedezi fel az összefüggést, és ha nem, magyarázat után könnyen megérti. De jóval nagyobb gondot jelent, ha az átlók számából kell visszakövetkeztetni a csúcsok számát.

a) A középiskolások ilyenkor azonnal a másodfokú egyenlet megoldóképletéhez nyúlnak. Pl.: *Hány csúcsa van annak a sokszögnek, amelynek 119 átlója van?* A középiskolás megoldása:

$$119 = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$n \cdot (n-3) = 238$$

$$n^2 - 3n - 238 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-238)}}{2}$$

$$n_1 = \frac{3 + \sqrt{961}}{2}$$

$$n_1 = 17$$

$$n_2 = \frac{3 - \sqrt{961}}{2}$$

$$n_2 = -14$$

A csúcsok száma nem lehet negatív, ezért a keresett sokszögnek 17 csúcsa van.

b) Egy alapiskolásnak több – a fentitől eltérő – lehetősége is van. Ha nem túl nagy az átlók száma, akár vázlatrajzolással is rájöhet a megoldásra. Ha több, mint 6 a csúcsok száma, akkor már fennáll a tévedés lehetősége. Az egyik segítség a táblázat, ami akkor jelent igazán segítséget, ha felfedezzük az átlószámok növekedésének szabályszerűségét:

csúcsok száma	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
átlók száma	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	
növekedés		2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

c) Akik ismerik a képletet, próbálgatással, becsléssel is sikerre juthatnak. Maradjunk az előző feladatnál: *Hány csúcsa van annak a sokszögnek, amelynek 119 átlója van?* Az $n \cdot (n - 3) = 238$ egyenletből kell kiindulni. Melyik az a szám, amely önmagával szorozva „nem sokkal nagyobb”, mint 238? $18 \cdot 18 = 324$, ez túl sok. $17 \cdot 17 = 289$, $16 \cdot 16 = 256$, ez utóbbi már kevés, tehát valószínűleg a 17 fog megoldást adni. Valóban: $17 \cdot 14 = 238$, tehát a keresett sokszögnek 17 csúcsa van.

d) Persze, nagy átlószám esetén ez sem túl egyszerű módszer. De segíthet az oszthatóság. *Hány csúcsa van annak a sokszögnek, amelynek 2700 átlója van?* A képletet alkalmazva:

$$2700 = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$$n \cdot (n-3) = 5400$$

Az oszthatóság nyelvére fordítva: Melyik az a két (egymáshoz közeli) természetes szám, amelynek a szorzata 5400? Az 5400 prímtényezős alakja $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Az 5400-nak összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ darab osztója van. Mind a 24 osztópárt felsorolni – nyilván – időigényes feladat:
$5400 = 1 \cdot 5400 = 2 \cdot 2700 = 3 \cdot 900 = 4 \cdot 1350 = 5 \cdot 1080 = 6 \cdot 900 = 8 \cdot 675 = 9 \cdot 600 = 10 \cdot 540 = 12 \cdot 450 = 15 \cdot 360 = 18 \cdot 300 = 20 \cdot 270 = 24 \cdot 225 = 25 \cdot 216 = 27 \cdot 200 = 30 \cdot 180 = 36 \cdot 150 = 40 \cdot 135 = 45 \cdot 120 = 50 \cdot 108 = 54 \cdot 100 = 60 \cdot 90 = \mathbf{72 \cdot 75}$.
Persze, ez komoly türelempróba, hiszen az eredményt mindig a felsorolás legvégén kapjuk meg. De – ha van megoldás – mindig eredményre vezet. Ilyen nagy szám esetében mindig érdemes a c) részben említett módon megbecsülni az eredményt. A keresett sokszögnek **75 csúcsa** van.

Horváth Géza