A KATEDRA-VERSENYEK
FŐ SZERVEZŐJE
a Katedra folyóirat

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

A MÁSODIK FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI
HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) [H. G.] ÉS PÓCSIK BÉLA, NYITRACSEHI [P. B.] FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

II–5–1. feladat: A középen álló három 2-es kihúzása után a 20023 számot kapjuk. A végeredmény akkor lesz a legkisebb, ha a 3-ast húzzuk ki, tehát a megkapható legkisebb szám a 2002. Három 2-est és egy 3-ast húztunk ki. Ezek összege **9**. [H. G.]

II–56–2. feladat: a) Az első számjegyet háromféleképpen tudja megválasztani, a másodikat négyféleképpen, a harmadikat már csak háromféleképpen, a negyediket pedig háromféleképpen. Ez összesen

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{108} \text{ lehetőség.}$$

b) A legkisebb kódszám a **2061**, a legnagyobb az **5987**. [H. G.]

II–56–3. feladat: a) egyjegyű: a 0 (hiszen erre nem vonatkozik a „nem nullával kezdődő" kikötés) (1 darab);
b) kétjegyű: 20, 32 (2 darab);
c) háromjegyű: 220, 232, 320 (3 darab)
d) négyjegyű: 2032, 2320, 3220 (3 darab). [H. G.]

II–6–4. feladat: Bontsuk a számokat prímtényezők szorzatára! $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $169 = 13 \cdot 13$, $441 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, $525 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$, $567 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, $605 = 5 \cdot 11 \cdot 11$, $625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Egy szám annyi nullára végződik, ahány $(2 \cdot 5)$ szorzat található a prímfelbontásában. A 625-ben négy, az 525-ben két 5-ös tényező, tehát ebben a két számban összesen hat 5-ös tényező található, de egyetlen 2-es tényező sincs bennük. Keressük meg a legtöbb 2-es tényezőt tartalmazó számot. A 64-ben hat darab 2-es prímtényező található. Ezért a három szám a 625, az 525 és a 64. Szorzatuk hat darab nullára fog végződni:

$$625 \cdot 525 \cdot 64 =$$
$$= (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$$
$$= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 7 = \mathbf{21\,000\,000}$$ [H. G.]

II–78–1. feladat: A *PQRS* négyzet területe 100 cm². Az *XYVZ* négyszög területe ennek fele, tehát 50 cm². Az *XYVZ* négyszög területét úgy kapjuk meg, hogy a 100 cm²-ből kivonjuk az *XQY*, *YRV*, *VSZ* és *ZPX* háromszögek területének összegét. Ha $|PX|$ = 2, akkor $|XQ|$ = 8 cm; ha $|QY|$ = 3 cm, akkor $|YR|$ = 7 cm, ha $|VR|$ = 4 cm, akkor $|SV|$ = 6 cm. Az *XQY* és *YRV* háromszögek területét ki tudjuk számítani. A *XQY* háromszög területe (8 · 3) : 2 = 12 cm², az *YRV* háromszögé pedig (7 · 4) : 2 = 14 cm². A *VSZ* és *ZPX* háromszögek területének összege ezért 50 – 26 = 24 cm². Jelöljük az *SZ* szakaszt *x*-szel! A *PZ* szakasz hossza ezért 10 – *x*.

$$T_{VSZ} + T_{ZPX} = 24$$

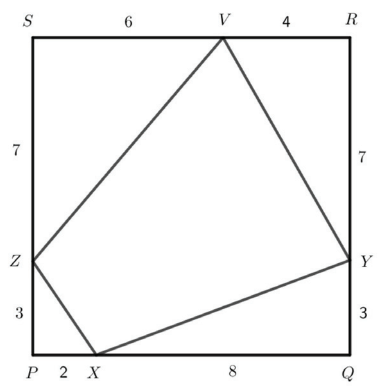
$$\frac{6 \cdot x}{2} + \frac{2 \cdot (10 - x)}{2} = 24$$

$$6x + 20 - 2x = 48$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

Az *SZ* szakasz hossza tehát **7 cm**. [H. G.]



II–78–2. feladat (Károlyi Károly alapján): Legyen a letörölt számjegy *x*, a megmaradó háromjegyű szám pedig A! Ekkor az eredeti szám értéke 10A + *x* volt, az összeadás után pedig 10A + *x* + A = (11A + *x*)-et kaptunk. Azaz 2022 = 11A + *x*, azaz *x* a 2022-nek a 11-gyel való osztás utáni maradéka.

$$2022 = 183 \cdot 11 + 9,$$

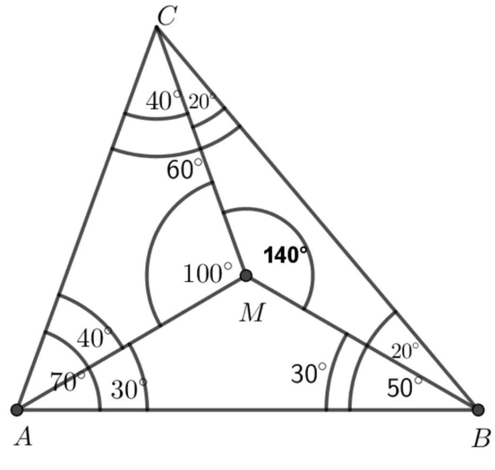
ami alapján *x* = 9.

a) A **9**-es számjegyet töröltük le.

b) Az eredeti szám az **1839** volt. [H. G.]

II–789–3. feladat:

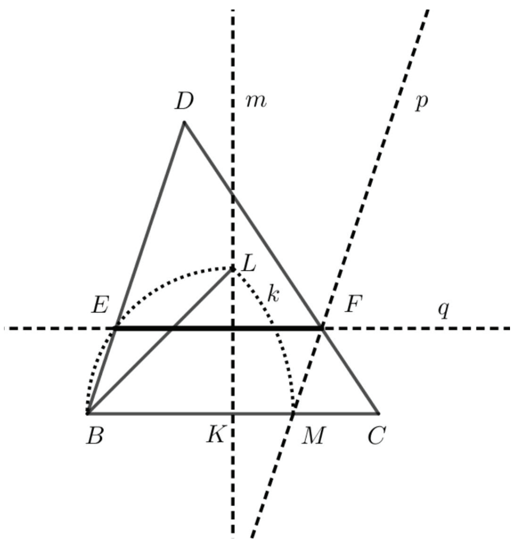
$|MAB\angle| = 70° – 40° = 30°$, $|BCA\angle| = 180° – (70° + 50°) = 60°$, $|BCM\angle| = 60° – 40° = 20°$, $|AMC\angle| = 180° – (40° + 40°) = 100°$. Mivel $|AMC\angle| = 100°$ és $|ABC\angle| = 50°$, ezért az *A, B, C* pontok egy olyan körvonalon fekszenek, amelynek *M* a középpontja, az $AMC\angle$ az *AC* húrhoz tartozó középponti szög, az $ABC\angle$ pedig az egyik kerületi szög. Tehát $|CM| = |MB|$, vagyis $|MBC\angle| = |BCM\angle| = 20°$. Az *ABM* háromszögben $|AMB\angle| = 180° – (30° + 30°) = 120°$. Ebből $|BMC\angle| = 360° – (100° + 120°) = 360° – 220° =$ **140°**. [P. B.]



II–9–4. feladat: Az *EFD* háromszög hasonló a *BCD* háromszöghöz. Mivel az *EFD* háromszög területe egyenlő a *BCFE* trapéz területével, ezért az *EFD* háromszög területe feleakkora, mint a *BCD* háromszögé. Ha két hasonló háromszög hasonlósági aránya *k*, akkor területeik aránya k^2. Fordítsuk meg ezt a tételt: ha a *BCD* háromszög és az *EFG* háromszög területének aránya 2 : 1, akkor a két háromszög hasonlóságának aránya $\sqrt{2}:1$. A *BC* oldalt *d*-vel jelölve a keresett *EF* szakasz hossza ezért

$$EF = \frac{d}{\sqrt{2}} = d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ebből adódik a szerkesztés:
1) Keressük meg a *BC* oldal *K* középpontját!
2) Állítsunk *BK* hosszúságú merőleges szakaszt a *K* pontból a *BC* szakaszra!
3) Pitagorasz tétele alapján a *BL* szakasz hossza $\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2d^2}{4}} = d\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4) Forgassuk le a *BL* szakaszt a *B* pontból a *BC* oldalra! Az így keletkező *BM* szakasz hossza megegyezik a keresett *EF* szakasz hosszával.
5) Szerkesszünk egy *p* párhuzamost a *BD* oldallal az *M* ponton keresztül!
6) Ahol a *p* egyenes metszi a *CD* oldalt, ott kapjuk az *F* pontot.
7) A keresett *EF* szakasz párhuzamos a *BC* oldallal.



A szerkesztés lépései:
1.) $BCD\Delta$
2.) K; $K \in BC$; $|BK| = |KC|$
3.) $m\leftrightarrow$; $m\leftrightarrow \perp BC$; $K \in m\leftrightarrow$
4.) L; $L \in m\leftrightarrow$; $|KL| = |BK|$
5.) k; $k(B; |BL|)$
6.) M; $M \in d \cap k$
7.) $p\leftrightarrow$; $p\leftrightarrow \parallel BD$; $M \in p\leftrightarrow$
8.) F; $F \in p\leftrightarrow \cap CD$
9.) $q\leftrightarrow$; $q\leftrightarrow \parallel BC$; $F \in q\leftrightarrow$
10.) E; $E \in BD \cap q\leftrightarrow$
11.) EF

Ellenőrzés: A *BCD* háromszög területe $\frac{d \cdot m_d}{2}$, az *EFD* háromszögé $\frac{d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot m_d \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{d \cdot m_d}{4}$.

Ebből látható, hogy az *EFD* háromszög területe feleakkora, mint a *BCD* háromszögé. [H. G.]

II–9–5. feladat (Károlyi K. alapján): Legyen *x* és *y* a két természetes szám, amelyekre:

$$xy + x + y = 2023$$

Adjunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához 1-et!

$$xy + x + y + 1 = 2024$$
$$x(y+1) + (y+1) = 2024$$
$$(y+1)(x+1) = 2024$$

Mivel *x* és *y* természetes számok, ezért az (*x* + 1) és az (*y* + 1) a 2024 egy-egy osztója. A 2024 prímtényezős felbontása: 2024 = 2 · 2 · 2 · 11 · 23. Az ebből adódó osztópárok: 1 · 2024 = 2 · 1012 = 4 · 506 = 8 · 253 = 11 · 184 = 22 · 92 = 23 · 88 = 44 · 46. Az ebből adódó számpárok: **(0; 2023)**, **(1; 1011)**, **(3; 505)**, **(7; 252)**, **(10; 183)**, **(21; 91)**, **(22; 87)** és **(43; 45)**. A feladatnak tehát 8 megoldása van. [H. G.]