A KATEDRA-VERSENYEK
FŐ SZERVEZŐJE

a Katedra folyóirat

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

AZ ELSŐ FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI
HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) [H. G.] ÉS PÓCSIK BÉLA, NYITRACSEHI [P. B.] FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

I–56–1. feladat:

1) A második részszorzat: C · ABC = GDC. Mivel C ≠ 0, ezért **C = 5**.
2) A második részszorzat (AB5 · 5 = GD5) csak akkor lehet háromjegyű, ha **A = 1**.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & B & 5 \\ \cdot & & 5 & D \\ \hline & D & E & F \\ G & D & 5 & \\ \hline G & 5 & B & F \end{array}$$

3) A százasok oszlopában az összegben csak akkor lehet 5-ös, ha a tízesek oszlopából volt tízesátlépés. Ezért D + D + 1 = 5, azaz **D = 2**. Ebből az is következik, hogy az első részszorzat 0-ra végződik, tehát **F = 0**.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & B & 5 \\ \cdot & & 5 & 2 \\ \hline & 2 & E & 0 \\ G & 2 & 5 & \\ \hline G & 5 & B & 0 \end{array}$$

4) Az első részszorzat kiszámítása során kapjuk, hogy 2 · 5 = 10, maradt 1, tehát 2 · B + 1 egy páratlan szám, vagyis E páratlan, ugyanakkor (a tízesek oszlopában) E + 5 > 9, tehát E > 4. Ezért az E értéke elvileg 7 vagy 9 lehet. Ha E = 7, akkor B = 2, de ez a számjegy már foglalt, tehát E ≠ 7. Ha **E = 9**, akkor **B = 4**. A 145 · 52 szorzást elvégezve pedig kapjuk, hogy **G = 7**. A feladatnak tehát 1 megoldása van [H. G.]:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 4 & 5 \\ \cdot & & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 9 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & \\ \hline 7 & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

I–56–2. feladat:
Egy szabályos dobókocka szemközti lapjain a pöttyök összege 7. Ha a kockák felső lapjain összesen 311, alsó lapjain összesen 193 pötty látható, akkor a dobozban (311 + 193) : 7 = 504 : 7 = **72** kocka van. [H. G.]

I–56–3. feladat: Egy-egy pirosnak, kéknek, sárgának és zöldnek mindenképp szerepelnie kell a sorban. Egy PKSZ sor hossza 5 + 6 + 8 + 11 = 30 cm. Ehhez kell még olyan rudacskákat választanunk, amelyek együttes hossza 30 cm, de ezek között már nem kell mind a négy színnek szerepelnie. Vizsgáljuk meg, hogy hányféleképpen tudunk kirakni 30 cm-t a rudakból!

a) 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5. (Tehát PPPPPP) Ezeket megfelelő helyre rakva a következő sorrendet kapjuk:

PPPPPPPKSZ

b) 5 + 5 + 6 + 6 + 8 (PPKKS). Az ebből kapott 60 cm-es sor:

PPPKKKSSZ

c) 5 + 6 + 8 + 11 (PKSZ). Az ebből adódó megoldás:

PPKKSSZZ

d) 6 + 6 + 6 + 6 + 6 (KKKKK). A 60 cm-es sor:

PKKKKKKSZ

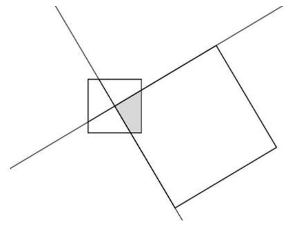
e) 6 + 8 + 8 + 8 (KSSS). A 60 cm-es sor:

PKKSSSSZ

f) 8 + 11 + 11 (SZZ). Az ebből kapott 60 cm-es sor:

PKSSZZZ [H. G.]

I–7–1. feladat:
Hosszabbítsuk meg a nagyobbik négyzet oldalait a kis négyzeten belül! Ezek az egyenesek a kis négyzetet négy egybevágó (tehát egyenlő területű) alakzatra osztják. A lefedett rész tehát a kis négyzet területének **negyede**. [P. B.]



I–78–2. feladat:
a) 2023 = 7 · 17 · 17. Egy szorzat akkor fejezi ki egy négyzet területét, ha benne minden prímtényező páros sokszor fordul elő. Esetünkben elég a prímtényezők közé fölvenni egy további 7-est. A legkisebb négyzet területe tehát 7 · 7 · 17 · 17 = 14 161 cm^2. Ez 7 szer annyi, mint a téglalap területe, tehát **7 darab** 2023 cm^2 területű téglalapból rakható ki a legkisebb négyzet. Ez nem valósítható meg, ha a téglalap 1 × 2023 vagy 7 × 289 méretű, (hiszen ezekből a téglalapokból 7 darabot egymás mellé rakva ismét csak téglalapot kapunk). Csak akkor kapunk a 7 darabot összerakva négyzetet, ha a téglalap mérete **17 × 119**.
b) Mivel a legkisebb négyzet területe 7 · 7 · 17 · 17, azaz (7 · 17) · (7 · 17), tehát a négyzet oldalának hossza 7 · 17 = **119 cm**.

I–789–3. feladat:
Az egyesek oszlopából látható, hogy **D = 0**, a tízezresek oszlopából pedig az, hogy **E = 1**, ezért a százasok oszlopában a B + B összeg 1-esre végződik, ami csak akkor lehetséges, ha **B = 5**, és a tízesek oszlopából van tízesátlépés, tehát ha a C + A összeg kétjegyű. Írjuk be ezeket az értékeket!

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathbf{A} & \mathbf{5} & \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ + & & \mathbf{C} & \mathbf{5} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{F} & \mathbf{1} & \mathbf{G} & \mathbf{A} \end{array}$$

Az A + C összeg az ezresek oszlopában F-re, a tízesek oszlopában pedig G-re végződik. Ennek az a magyarázata, hogy az egyesek oszlopából nem volt tízesátlépés, az ezresek oszlopából viszont volt. Ebből következik, hogy F = G + 1. Ugyanakkor kijelenthetjük, hogy sem az A, sem a C értéke nem lehet 9, mert ebben az esetben vagy az A, vagy a C értéke megegyezne az F értékével. Állítsunk össze táblázatot a megmaradt értékekből! (Tehát sem az A, sem a C, sem a G, sem az F értéke nem lehet 0, 1, 5 vagy 9.)

A	2	3	3	4	4	4	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
C	8	8	7	8	7	6	8	7	8	6	4	7	6	4	3	2
G	0	1	0	2	1	0	4	3	5	3	1	5	4	2	1	0
F	1	2	1	3	2	1	5	4	6	4	2	6	5	3	2	1

A táblázatban pirossal emeltük ki az ellentmondáshoz vezető értékeket.
A feladatnak tehát négy megoldása van [H. G.]:

1) A = 4, C = 8, G = 2, F = 3

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \\ + & & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{array}$$

2) A = 6, C = 7, G = 3, F = 4

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ + & & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{array}$$

3) A = 7, C = 6, G = 3, F = 4

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ + & & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{array}$$

4) A = 8, C = 4, G = 2, F = 3

$$\begin{array}{rccccc} & & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ + & & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{array}$$

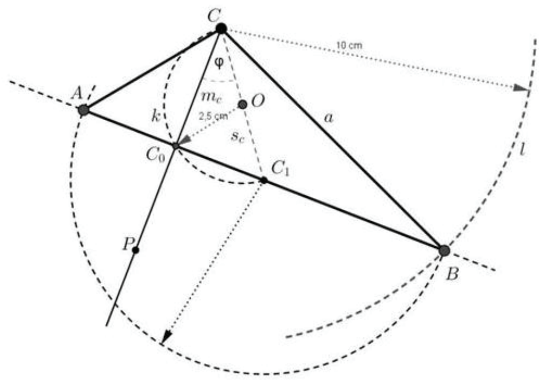
I–89–4. feladat: Ha egy szám osztható 11-gyel, akkor a páros helyeken álló számjegyei összegének és a páratlan helyeken álló számjegyei összegének különbsége osztható 11-gyel. (Tehát ez a különbség ...–22, –11, 0, 11, 22, ...) A keletkező hatjegyű szám A2023B alakú lesz, ami akkor lesz osztható 11-gyel, ha A + 0 + 3 = 2 + 2 + B = 0 vagy A + 0 + 3 = 2 + 2 + B = 11, tehát A – B = 1 vagy A – B = 12. Ez utóbbi eset nem jöhet létre, hiszen két számjegy különbsége nem lehet 12. Ha A – B = 1, akkor 9 megoldást kapunk:

A	9	8	7	6	5	4	3	2	1
B	8	7	6	5	4	3	2	1	0

A keresett számok: **920238, 820237, 720236, 620235, 520234, 420233, 320232, 220231, 120230**. [H. G.]

I–9–5. feladat:

Vegyük fel a háromszög CC_1 súlyvonalát, ennek O középpontjából szerkesszünk egy $OC = OC_1$ = 2,5 cm sugarú Thalész-kört (jelöljük k-val)! Szerkesszük meg azt a 37°-os φ szöget, amelynek az egyik szára a CC_1 félegyenes! (Elég az egyik oldalra!) Ahol a másik szögszár (a CP félegyenes) metszi a k kört, ott van az m_c magasság talppontja. Ezt a pontot jelöljük C_0-val! A háromszög másik két csúcspontja a C_0C_1 egyenesen fekszik. Ugyanakkor tudjuk, hogy a C csúcs a B csúcstól 10 cm-re van. Ezért szerkesszünk egy $l(C$; 10 cm) kört. Ahol az l kör metszi a C_0C_1 egyenest, ott van a B pont. (Itt is két megoldást kapnánk, dolgozzunk csupán az egyikkel!) A C_1 pont az AB oldal középpontja, ebből könnyen megkapjuk az A pont helyét.



A szerkesztés lépései:

1.) s_c; $s_c = CC_1$ = 5 cm
2.) O; $O \in CC_1$, $|OC| = |OC_1|$ = 2,5 cm
3.) k; $k(O, OC)$
4.) $CP\rightarrow$; $|C_1CP\angle|$ = 37°
5.) C_0; $C_0 \in (k \cap CP\rightarrow)$
6.) l; $l(C$, 10 cm)
7.) B; $B \in (l \cap C_0C_1)$
8.) A; $A \in BC_1\rightarrow$, $|BC_1| = |AC_1|$, $A \neq B$
9.) ABC_Δ
[H. G.]