A KATEDRA-VERSENYEK FŐ SZERVEZŐJE
a Katedra folyóirat

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedra.szerkesztoseg@gmail.com**

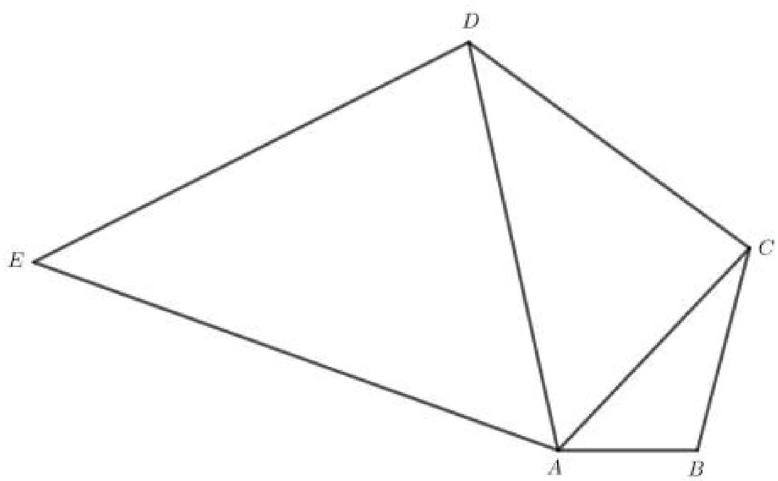
KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

A HARMADIK FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI
HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

III–56–1. feladat: A háromszög-egyenlőtlenség értelmében az AB hossza legalább 2 cm, tehát $|BC| = 3$ cm és $|AC| = 4$ cm. Ebből $|CD| = 5$ cm, $|AD| = 6$ cm, $|ED| = 7$ cm, $|AE| = 8$ cm. A háromszög-egyenlőtlenség mindhárom háromszög (ABC, ACD és ADE) esetében teljesül. Az ötszög kerülete legalább: $|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |AE| = 2 + 3 + 5 + 7 + 8 =$ **25 cm**.



III–56–2. feladat: Az egyjegyű és kétjegyű számokat leírva $9 + 90 \cdot 2 = 189$ számjegyet használunk el. Még $2022 - 189 = 1833$ számjegyet kell leírnunk. Ezek háromjegyű számok lesznek. Ezért $1833 : 3 = 611$ darab háromjegyű számot kell még leírnunk, tehát összesen $99 + 611 =$ **710** darab szám kerül a papírlapra.

III–56–3. feladat: A hét szám összege 28. Ha az első négy szám összege megegyezik az utolsó négy szám összegével, akkor (mivel a középső szám mindkét összegben benne van) az első három szám összege is megegyezik az utolsó három szám összegével. Ha a középső szám páratlan lenne, akkor a megmaradt hat szám összegének is páratlannak kellene lennie. Ez azonban csak akkor állhat elő, ha az első három szám összege páratlan, az utolsó háromé pedig páros, vagy fordítva. Tehát a középső számnak **párosnak** kell lennie. A középső szám tehát lehet **2, 4** vagy **6**. Mindhárom esetre van megoldás:
Ha a középső szám **2**, akkor a többi hat szám összege 26, ennek fele 13. Ebben az esetben az egyik oldalon az 1 + 5 + 7, a másikon a 3 + 4 + 6 összeg írható fel. Ebből:

$$1 + 5 + 7 + \mathbf{2} = \mathbf{2} + 3 + 4 + 6.$$

Ha a középső szám **4**, akkor a többi szám összege 24, ennek fele 12. Ebben az esetben az egyik oldalon az 1 + 5 + 6, a másikon a 2 + 3 + 7 összeg írható fel. Ebből:

$$1 + 5 + 6 + \mathbf{4} = \mathbf{4} + 2 + 3 + 7.$$

Ha a középső szám **6**, akkor a többi szám összege 22, ennek fele 11. Ebben az esetben az egyik oldalon az 1 + 3 + 7, a másikon a 2 + 4 + 5 összeg írható fel. Ebből:

$$1 + 3 + 7 + \mathbf{6} = \mathbf{6} + 2 + 4 + 5.$$

III–78–1. feladat: Az *AEFD* négyszög területét jelöljük T_1-gyel, az *EBCF* négyszögét pedig T_2-vel! Mindkét négyszög egy-egy trapéz. Ha $DF = x$, akkor $FC = 9 - x$, továbbá: $AE = 2$ cm, $EB = 7$ cm, és mindkét trapéz magassága 5 cm.

Ebből $T_1 = \frac{(x+2)\cdot 5}{2}$ és $T_2 = \frac{(9-x+7)\cdot 5}{2} = \frac{(16-x)\cdot 5}{2}$.

$$T_1 = \frac{7}{11}\cdot T_2$$
$$\frac{(x+2)\cdot 5}{2} = \frac{7}{11}\cdot\frac{(16-x)\cdot 5}{2}$$
$$x+2 = \frac{7}{11}\cdot(16-x)$$
$$11x+22 = 112-7x$$
$$18x = 90$$
$$x = 5$$

Az *F* pont a *D* ponttól 5 cm-re, a *C* ponttól pedig 4 cm-re fekszik a *DC* oldalon.

III–78–2. feladat: $\overline{ab} = 10a + b$ és $\overline{ba} = 10b + a$. A feladat feltételei értelmében:

$$10a+b = \frac{4}{7}\cdot(10b+a)$$
$$70a+7b = 40b+4a$$
$$66a = 33b$$
$$2a = b$$

Olyan kétjegyű számokat keresünk tehát, amelyekben a második számjegy az első kétszerese. Négy megoldást találhatunk: **12, 24, 36** és **48**.

Ellenőrzés: $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$, $\frac{24}{42} = \frac{4}{7}$, $\frac{36}{63} = \frac{4}{7}$ és $\frac{48}{84} = \frac{4}{7}$.

III–789–3. feladat: A legkisebb 11-gyel osztható háromjegyű szám a 110. Az ennél 2-vel nagyobb szám a 112. Ez 13-mal osztva 8-at ad maradékul. Készítsünk olyan táblázatot, amelynek első sorában a 11-gyel osztható számok, második sorában az ennél 2-vel nagyobb számok, a harmadikban pedig a 2. sorban levő számok osztási maradékai lesznek!

110	121	132	143	**154**	165	176	187	198	209	220	231	242	253
112	123	134	145	**156**	167	178	189	200	211	222	233	244	255
8	6	4	2	**0**	11	9	7	5	3	1	12	10	8

Látható, hogy a táblázat harmadik sorában a maradékok periodikusan ismétlődnek (kettesével csökkennek): 8, 6, 4, 2, 0, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 12, 10, 8, 6, 4, ... Minket azok az oszlopok érdekelnek, amelyek harmadik sorában 0 van. Ezek második sorában az első megoldást a $156 = 11 \cdot 13$ adja, a következő a $299 = 23 \cdot 13$, majd a $442 = 34 \cdot 13$, az $585 = 45 \cdot 13$, a $728 = 56 \cdot 13$ és a $871 = 67 \cdot 13$. Az ezt követő érték már négyjegyű (1014). A 156, 299, 442, 585, 728, 871 értékekből 2-t levonva kapjuk a feladat megoldásait: **154, 297, 440, 583, 726, 869**.

III–9–4. feladat:

$$12 = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{2}$$
$$24 = \sqrt{a\cdot b}$$
$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = \sqrt{a\cdot b}$$
$$a\cdot b = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 576$. Keressük meg az 576 összes osztóját, majd írjuk fel az összes osztópárt, és az eredményeket foglaljuk táblázatba:

a	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24
b	576	288	192	144	96	72	64	48	36	32	24

Mivel a feltételek szerint $a < b$, ezért az $a = 24$, $b = 24$ esetet kizárva a feladatnak összesen 10 megoldása van.
A legrövidebb átfogó megtalálásához szükségünk van az átfogó (c) méretére.

$$c = \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2}$$
$$c = \sqrt{a+b}$$

$\sqrt{a}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{18}$
$\sqrt{b}$	$\sqrt{576}$	$\sqrt{288}$	$\sqrt{192}$	$\sqrt{144}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{72}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{48}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{32}$
c	$\sqrt{577}$	$\sqrt{290}$	$\sqrt{195}$	$\sqrt{148}$	$\sqrt{102}$	$\sqrt{80}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{60}$	$\sqrt{52}$	$\sqrt{50}$

A $c = \sqrt{a+b}$ összefüggésből adódik, hogy az átfogó akkor a legkisebb, amikor az $a + b$ összeg a legkisebb. A legrövidebb átfogó hossza $\sqrt{50} \approx$ **7,071 cm**.

III–9–5. feladat: Használjunk zsebszámológépet (vagy a számítógépünk számológépét)!

$$\sqrt{2023} \approx 44{,}97777229$$

Egyre több számjegyet felhasználva végezzük el a négyzetre emelést egészen addig, míg olyan értéket nem kapunk, amely a 2023... számcsoporttal kezdődik!
$44^2 = 1936$
$449^2 = 201601$
$4497^2 = 20223009$
Úgy tűnik, hogy ezt a sorozatot folytatva csak nagyon sokjegyű olyan számot találunk, amely a 2023... számcsoporttal kezdődik:
$4497777229^2 = 20230000001710918441$
Próbálkozzunk a 2024 négyzetgyökével:

$$\sqrt{2024} \approx 44{,}98888752$$

$44^2 = 1936$
$449^2 = 201601$
$4498^2 =$ **20232004**
Mielőtt kijelentenénk, hogy ez a legkisebb olyan négyzetszám, amely a 2023... számcsoporttal kezdődik, ellenőriznünk kell a 20230, a 20231, ... 20239 számok négyzetgyökeiből adódó számsorokat, de most már elég lesz megvizsgálnunk azokat a számokat, amelyek második hatványának kilencnél kevesebb számjegye van.

$$\sqrt{20230} \approx 142{,}2322045$$

$142^2 = 20164$
$1422^2 = 2022084$
$14223^2 = 202293729$

A $\sqrt{20231} \approx 142{,}2322045$, $\sqrt{20232} \approx 142{,}2392351$ értékekkel nem érdemes foglalkozni, hiszen a négyzetre emelés első három lépése megegyezik az előzőével

$$\sqrt{20233} \approx 142{,}2427503$$

$14224^2 = 202322176$, de ennek több számjegye van, mint a 4498 négyzetének. Az így megtalálható következő négyzetszám a $14225^2 = 202350625$ és a $14226^2 = 202379076$, de ezek kilencjegyű számok.
Vizsgáljuk meg a esetet is!

$$\sqrt{20240} \approx 142{,}267354$$

$142^2 = 20164$
$1422^2 = 2022084$
$14226^2 = 202379076$
Ez azonban nem kisebb négyzetszám, mint amit a $\sqrt{20230} \approx 142{,}2322045$ esetében levezettünk. A legkisebb keresett négyzetszám tehát a **20232004**.