A KATEDRA-VERSENYEK FŐ SZERVEZŐJE
Katedra Polgári Társulás

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: **www.katedra.sk, katedrapolgaritarsulas@gmail.com**

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

AZ I. FORDULÓ MEGOLDÁSAI — HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

I–5–1. feladat:
Ha két négyjegyű szám összege ötjegyű, akkor az összeg első számjegye csak 1 lehet, tehát **A = 1**.

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & B & 1 & B \\ + & B & 1 & B & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & C \end{array}$$

Mivel az összeadás összes oszlopában egy B + 1 összeadás szerepel, ezek mindegyike 1-re végződik, és az ezresek oszlopából az is kiderül, hogy van átlépési maradék, ezért B + 1 + 1 = 11, azaz **B = 9**. Ebből 9 + 1 = 10, tehát **C = 0**. A feladatnak egyetlen megoldása van:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 9 & 1 & 9 \\ + & 9 & 1 & 9 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

I–56–2. feladat:
Egyjegyű: 0, 2, 5 → 3 darab; 2 páros
Kétjegyű: 20, 22, 25, 50, 52 → 5 darab; 4 páros
Háromjegyű: 202, 205, 220, 225, 250, 252, 502, 520, 522 → 9 darab; 7 páros
Négyjegyű: 2025, 2052, 2205, 2250, 2502, 2520, 5022, 5202, 5220 → 9 darab; 7 páros

I–56–3. feladat:
Mivel a számjegyek között csupán egy páratlan van, ezért az összetolt szám 5-re fog végződni. A keresett szám akkor lesz a legkisebb, ha 2-essel fog kezdődni, a 2-est pedig két 0 fogja követni. Ezt úgy érhetjük el, ha kihúzzuk a 4-est és az összes 2-est. A keresett szám tehát a **2005**.

I–6–4. feladat:
Ha két négyjegyű szám összege ötjegyű, akkor az összeg első számjegye csak 1 lehet, tehát **B = 1**, ugyanakkor A ≠ 0 és C ≠ 0.
Ha az ezresek oszlopában nem lenne tízesátlépési maradék, akkor az A értéke csak 0 lehetne, ami ellentmondás. Tehát:

a) A + C = 10 + C, vagy
b) A + C + 1 = 10 + C.

Az a) esetben az A értéke 10 lenne, ami lehetetlen. Tehát a b) eset a helyes, amiből **A = 9**.

$$\begin{array}{rrrrr} & 9 & 9 & 9 & 1 \\ + & C & 9 & 9 & 9 \\ \hline 1 & C & 9 & 9 & D \end{array}$$

Az egyesek oszlopából látható, hogy **D = 0**. Az ezresek oszlopában 9 + C + 1 = 10 + C, vagyis 10 + C = 10 + C, a C értéke tehát elvileg bármi lehetne, de a 0, 1, 9 számjegyek már foglaltak, ezért **C** ∈ {**2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**}, a feladatnak tehát 7 megoldása van.

I–7–1. feladat:

Jelöljük a keresett számokat a, b, c, d betűkkel! Ha a négy szám átlaga 41, akkor az összegük $41 \cdot 4 = 164$. Tehát

$$a + b + c + d = 164.$$

Az első három szám átlaga 38, tehát összegük $38 \cdot 3 = 114$, azaz

$$a + b + c = 114.$$

Az utolsó három szám átlaga 44, tehát összegük $44 \cdot 3 = 132$, azaz

$$b + c + d = 132.$$

$$(a + b + c + d) - (a + b + c) = 164 - 114,$$

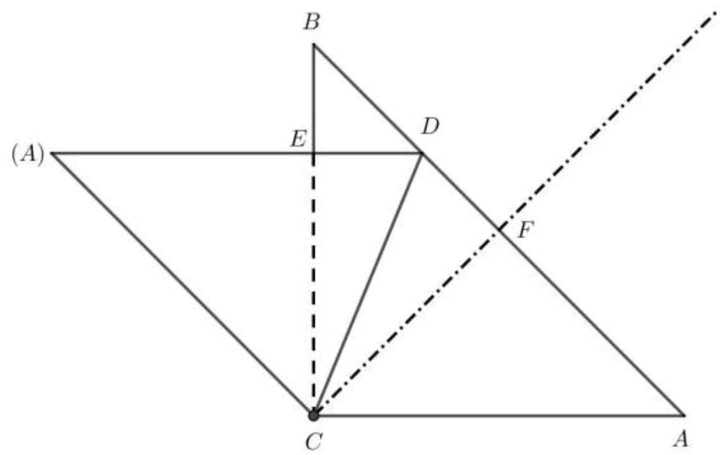
ebből $\boldsymbol{d = 50}$, és mivel $a = d - 18$, ezért $\boldsymbol{a = 32}$

a) Az első szám a **32**, az utolsó pedig az **50**.

b) Helyettesítsük be vagy az $a + b + c = 114$ egyenletbe az a értékét, vagy a $b + c + d = 132$ egyenletbe a d értékét. Mindkét egyenletből azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{b + c = 82}$.

A két középső szám átlaga tehát $82 : 2 = \mathbf{41}$.

I–78–2. feladat:



A „lehajtott” $CD(A)$ háromszög a CD egyenes szerint szimmetrikus a CDA háromszöggel. A CD félegyenes ezért a BCF szögfelezője, ahol $CF \perp AB$. Mivel a BFC szög derékszög, ezért $|BCF\angle| = 45°$. Ebből következik, hogy $|BCD\angle| = 22{,}5°$. A szerkesztés menete tehát:

1.) A C csúcsból merőlegest szerkesztünk az AB oldalra.
2.) A merőleges és az AB oldal metszéspontját jelöljük F-fel!
3.) Szerkesszük meg a BCF szögfelezőjét!
4.) Ez a szögfelező a keresett D pontban metszi az AB oldalt.

I–789–3. feladat:

Abból, hogy az első szorzat megegyezik az első tényezővel, következik, hogy **A = 1**.

```
      1 B C
    · C D 1
    -------
      1 B C
    1 1 C E
  1 F B 1
  ---------
  1 B G 1 G C
```

A százasok oszlopában 1 + C + 1 = 11, azaz C = 9, vagy 1 + C + 1 + 1 = 11 azaz C = 8.

a) Ha C = 9, akkor

$$\begin{array}{r} 1\,B\,9 \\ \cdot\ 9\,D\,1 \\ \hline 1\,B\,9 \\ 1\,1\,9\,E \\ 1\,F\,B\,1 \\ \hline 1\,B\,G\,1\,G\,9 \end{array}$$

Mivel ebben az esetben abból a feltételezésből indultunk ki, hogy a tízesek oszlopából nem volt átlépési maradék, B + E < 10. Az ezresek oszlopában 1 + B + 1 = G, a tízesek szlopában pedig B + E = G, azaz B + 2 = B + E, vagyis **E = 2** és **C = 9**.
b) Ha C = 8, akkor

$$\begin{array}{r} 1\,B\,8 \\ \cdot\ 8\,D\,1 \\ \hline 1\,B\,8 \\ 1\,1\,8\,E \\ 1\,F\,B\,1 \\ \hline 1\,B\,G\,1\,G\,8 \end{array}$$

Ha a tízesek oszlopából van átlépési maradék, akkor B + E > 9, és B + E = G + 10, tehát G = B + E – 10.
Az ezresek oszlopában 1 + B + 1 = G, azaz G = B + 2, vagyis:

$$B + 2 = B + E - 10.$$

Ebből E = 12, ami lehetetlen. Tehát C ≠ 8.
Azaz **E = 2** és **C = 9**.

$$\begin{array}{r} 1\,B\,9 \\ \cdot\ 9\,D\,1 \\ \hline 1\,B\,9 \\ 1\,1\,9\,2 \\ 1\,F\,B\,1 \\ \hline 1\,B\,G\,1\,G\,9 \end{array}$$

A második részszorzat: 1B9 · D = 1192. Egy 9-re végződő szám D-szerese csak akkor végődhet 2-re, ha **D = 8**. 1192 : 8 = 149, tehát **B = 4**. Ebből már rekonstruálható a teljes szorzás:

$$\begin{array}{r} 1\,4\,9 \\ \cdot\ 9\,8\,1 \\ \hline 1\,4\,9 \\ 1\,1\,9\,2 \\ 1\,F\,4\,1 \\ \hline 1\,4\,G\,1\,G\,9 \end{array}$$

Innen már többféleképpen is megkaphatjuk az F és a G értékét. Például: 149 · 9 = 1341, tehát **F = 3**, és 149 · 981 = 146 169, azaz **G = 6**.
A feladatnak tehát **egyetlen megoldása** van:

$$\begin{array}{r} 1\,4\,9 \\ \cdot\ 9\,8\,1 \\ \hline 1\,4\,9 \\ 1\,1\,9\,2 \\ 1\,3\,4\,1 \\ \hline 1\,4\,6\,1\,6\,9 \end{array}$$

I–89–4. feladat:
2025 = 3 · 3 · 3 · 3 · 5 · 5.
A 2025 osztói: 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025.
A 2025 osztópárjai: 1 · 2025, 3 · 675, 5 · 405, 9 · 225, 15 · 135, 25 · 81, 27 · 75, 45 · 45.

Három olyan osztópár van, amelynek mindkét tagja kétjegyű: $25 \cdot 81$, $27 \cdot 75$, $45 \cdot 45$.
Ezek összege: $25 + 81 = 106$, $27 + 75 = 102$, $45 + 45 = 90$. A legnagyobb összeg tehát **106**.

I–9–5. feladat: Ha egy négyzet oldalának hossza h, akkor területe h^2. Két „egymásra következő" négyzet közös részének területe ennek negyede, tehát $\frac{h^2}{4}$.

Ha n darab négyzetet helyezünk az ábrán látható módon egymásra, akkor ezeknek $(n - 1)$ darab közös részük lesz, tehát a keletkező alakzat területe $n \cdot h^2 - (n-1) \cdot \frac{h^2}{4}$.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen n esetében lesz ez az érték a h^2-nek a 7-szerese!

$$n \cdot h^2 - (n-1) \cdot \frac{h^2}{4} = 7h^2$$
$$4n \cdot h^2 - (n-1) \cdot h^2 = 28h^2$$
$$4nh^2 - nh^2 + h^2 = 28h^2$$
$$3nh^2 + h^2 = 28h^2$$
$$h^2 \cdot (3n+1) = 28h^2$$
$$3n + 1 = 28$$
$$3n = 27$$
$$n = 9$$

Tehát **9 darab** négyzetet kell a feladat ábrájában látható módon egymásra helyeznünk, hogy a keletkező alakzat területe a kiinduló négyzet területének 7-szerese legyen.