A KATEDRA-VERSENYEK FŐ SZERVEZŐJE
Katedra Polgári Társulás

KATEDRA-VERSENY

A Katedra-versenyek az oktatási minisztérium által akkreditált és támogatott versenyek.
További, a versennyel kapcsolatos információk: www.katedra.sk, katedrapolgaritarsulas@gmail.com

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

ROVATVEZETŐ: RNDr. HORVÁTH GÉZA, horvath.geza@slovanet.sk

A II. FORDULÓ MEGOLDÁSAI — HORVÁTH GÉZA (ZSELÍZ) FELADATAI

V–VI. OSZTÁLY

II–56–1. feladat:

a) $|BC| = 95 + 80 - 145 = |AC| + |BD| - |AD| =$ **30 km**;

b) $|AB| = |AC| - |BC| = 95 - 30 =$ **60 km**;

$|CD| = |BD| - |BC| = 80 - 30 =$ **50 km**.

II–56–2. feladat:

A téglalap félkerülete 1012 cm, tehát a két szomszédos oldal hosszúságának összege 1012 cm. Foglaljuk táblázatba a lehetséges értékeket!

egyik oldal	1011	1010	1009	...	506
másik oldal	1	2	3	...	506

506-féle téglalap létezik.

II–56–3. feladat:

Az összeget alkotó szorzatok 0-ra vagy 4-re végződnek. A 4-re végződő szorzatok:

1. $\rightarrow$ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$
2. $\rightarrow$ $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$
3. $\rightarrow$ $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$

$\vdots$

405. $\rightarrow$ $2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 2024$

Összesen 405 darab 4-re végződő szorzatunk van, ezek összege 0-ra végződik. Ezért a műveletsor eredménye is **0-ra** fog végződni.

II–7–1. feladat:

a) Ha mind a hat szám páratlan lenne, akkor összegük több lenne 30-nál, mert

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.$$

A számok között tehát lennie kell párosnak is, de ha csak egy páros szám lenne közöttük, akkor a hat szám összege nem lehetne páros. Tehát a számok között van legalább két páros, ezért a hat szám szorzata osztható 4-gyel.

b) Tételezzük fel, hogy a számok egyike sem lesz osztható 3-mal! Ebben az esetben akkor kapjuk a lehető legkisebb összeget, ha a két páros szám mellé (tehát a 2 és 4 mellé) az 1, 5, 7, 11 számokat választjuk. A hat szám összege ebben az esetben épp 30, mert

$$1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 11 = 30$$

A hat szám szorzata ebben az esetben **nem lesz osztható 3-mal**, mert a szorzat egyik tényezője sem osztható 3-mal.

Ellenben találhatunk olyan hat számot, amelyek összege 30, és lesz közöttük 3-mal osztható. Ez esetben a **szorzatuk is osztható lesz 3-mal**. Ilyen hat szám például az 1, 2, 4, 6, 8, 9. Ezek összege 30, szorzata pedig 3456, ami **osztható 3-mal**.

Tehát a b) kérdésre nem adhatunk egyértelmű választ: **lehetséges, de nem biztos**, hogy a hat szám szorzata osztható lesz 3-mal.

II–7–2. feladat:

Egyjegyű számmal osztva csak akkor lehet az osztás maradéka 7, ha 8-cal vagy 9-cel osztunk. Vizsgáljuk meg az összes esetet!

a) Ha 8-cal osztunk:

osztandó	**151**	252	353	454	555	656	757	858	**959**
hányados	**18**	31	44	56	69	82	94	107	**119**
maradék	**7**	2	1	3	3	0	5	1	**7**

b) Ha 9-cel osztunk:

osztandó	**151**	252	353	454	555	656	757	858	959
hányados	**16**	28	39	50	61	72	84	95	106
maradék	**7**	0	2	4	2	8	1	1	5

A feladatnak tehát **3 megoldása** van:

151 : 8 = 18, m. 7
959 : 8 = 119, m. 7
151 : 9 = 16, m. 7

II–789–3. feladat:
Tekintsük az első szorzót a nagyobbnak, tehát $10a + b > 10b + a$.

$$2025 \cdot (10a+b) - 2025(10b+a) = 72900$$
$$2025(9a-9b) = 72900$$
$$9a-9b = 36$$
$$a-b = 4$$

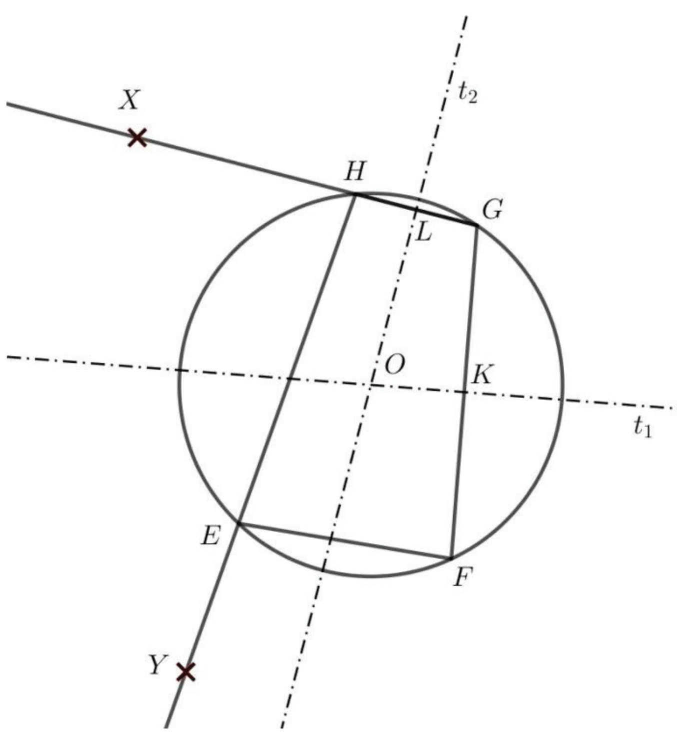
Sem a, sem b nem lehet nulla, és $a > b$, különben a két szorzat közötti különbség nem 72 900 lenne, hanem –72 900. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket!

a	5	6	7	8	9
b	1	2	3	4	5
az első szorzó	51	62	73	84	95

A feladatnak tehát **5** megoldása van:

51 · 2025 – **15** · 2025 = 72 900
62 · 2025 – **26** · 2025 = 72 900
73 · 2025 – **37** · 2025 = 72 900
84 · 2025 – **48** · 2025 = 72 900
95 · 2025 – **59** · 2025 = 72 900

II–89–4. feladat:
Szerkesztünk egy G csúcsú 100°-os szöget, és a szögszárain fölvesszük a H és az F pontot. A körülírt kör O középpontja rajta van a HG szakasz és a GF szakasz felezőmerőlegesén is. Megszerkesztjük az O középpontú k kört, amely áthalad a H, a G és az F ponton. A keresett E pont is illeszkedik a k körre, ugyanakkor rajta van a $|GHY| = 95°$ szög HY szögszárán is.



A szerkesztés lépései:
1. FG; $|FG| = 8$ cm
2. $FGX\angle$; $|FGX\angle| = 100°$
3. H; $H \in GX\rightarrow$; $|HG| = 3$ cm
4. K; $K \in FG\rightarrow$; $|FK| = |KG| = 4$ cm
5. t_1; $K \in t_1$; $t_1 \perp FG$
6. L; $L \in HG$; $|HL| = |LG| = 1{,}5$ cm
7. t_2; $L \in t_2$; $t_2 \perp HG$
8. O; $O \in t_1 \cap t_2$
9. k; $k(O; |OG| = |OH| = |OF|)$
10. $GHY\angle$; $|GHY\angle| = 95°$
11. E; $E \in HY \cap k$
12. $DFGH$ négyszög

II–89–5. feladat:
Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel! Az $a + b + c = 15$ és $c = a \cdot b$ összefüggésekből következik, hogy

$$a + b + ab = 15$$
$$ab + a + b = 15$$
$$a(b+1) + b = 15$$

Adjunk hozzá az egyenlet mindkét oldalához 1-et!

$$a(b+1) + b + 1 = 16$$
$$a(b+1) + (b+1) = 16$$
$$(b+1)(a+1) = 16$$

A 16-ot háromféleképp írhatjuk fel két természetes szám szorzataként: $1 \cdot 16$, $2 \cdot 8$ vagy $4 \cdot 4$.
Az $1 \cdot 16$ nem ad megoldást, hiszen ebben az esetben az egyik szám értéke 0, a másiké 15 lenne.
A harmadik eset sem ad megoldást, hiszen ebben az esetben $a = 3$ cm, $b = 3$ cm és $c = 9$ cm lenne, de ezekre az értékekre nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
Ha $b + 1 = 2$ és $a + 1 = 8$, akkor $b = 1$ cm, $a = 7$ cm és $c = 7$ cm. A feladat egyetlen megoldása tehát: **1 cm**, **7 cm**, **7 cm**.