

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

AZ I. FORDULÓ MEGOLDÁSAI

V–VI. OSZTÁLY

I–5–1.

Kapu Tibor, a második magyar űrhajós, 2025. 6. 25-én indult útnak a Nemzetközi Űrállomásra. Ha a dátumban a hónap és a nap sorszámát összeadjuk, akkor összegként 31-et kapunk. Hány ilyen tulajdonsággal rendelkező nap van 2025-ben?

Megoldás:

A lehetőségek felírásakor figyelembe kell venni, hogy a február kivételével, minden hónap 30 vagy 31 napos. A 2025-ös év nem szökőév, a február 28 napos volt, így ehhez a hónaphoz nem találunk megoldást. A következő napok felelnek meg a feladat feltételeinek (az évszám elhagyása után):

1. 30., 3. 28., 4. 27., 5. 26., 6. 25., 7. 24., 8. 23., 9. 22., 10. 21., 11. 20., 12. 19.

Tehát 11 adott tulajdonsággal rendelkező nap van 2025-ben.

I–5–2.

Állítsd elő a 29-et a megadott számjegyek egyszeri felhasználásával, műveleti- és zárójelek segítségével! (Mindegyik számjegyet fel kell használni, a számjegyek sorrendje nem kötött, a számjegyekből nem lehet többjegyű számokat kialakítani, mindegyik esetre elegendő egyetlen megoldást megadni.)

a) 1, 2, 5, 8 b) 1, 2, 6, 7 c) 1, 4, 5, 7

d) 2, 6, 8, 9 e) 3, 4, 5, 8 f) 3, 4, 8, 9

Megoldás:

Mindegyik számnégyesre példaként mutatunk 1-1 helyes megoldást. Természetesen más helyes megoldás is létezik.

a) $8 \cdot (2 + 1) + 5 = 29$

b) $(7 - 2) \cdot 6 - 1 = 29$

c) $(7 - 1) \cdot 4 + 5 = 29$

d) $2 \cdot 6 + 8 + 9 = 29$

e) $(8 - 3) \cdot 5 + 4 = 29$

f) $3 \cdot 9 + 8 : 4 = 29$

I–56–3.

Egy kalapban 50 papírdarab van, amelyre egyenként ráírtuk a számokat 1-től 50-ig. Legkevesebb hány papírdarabot kell Vilmának a kalapból találmra kihúznia, hogy biztosan legyen köztük

a) páros szám,

b) 10-től nagyobb szám,

c) olyan szám, ami az 5 többszöröse,

- d) 17-tel nem osztható szám,
 e) olyan szám, ami nem tartalmaz hármat,
 f) olyan két szám, amiknek az összegük nagyobb, mint 50?

Megoldás:

- a) A papírdarabokon szereplő számok közül 25 páratlan, ezért a 26. húzásra már biztosan páros számot húznánk.
 b) A számok között 10 olyan van, ami 10-től nem nagyobb, ezért a 11. húzásra már biztosan 10-től nagyobb számot húznánk.
 c) Az 50 szám közül 10 olyan van, ami az ötnek többszöröse. Ebből következik, hogy 40 szám nem osztható 5-tel, így a 41. húzásra már biztosan az 5 egyik többszörösét húznánk.
 d) A 17-nek 2 többszöröse van a számok között: 17, 34. Ebből következik, hogy a 3. húzásra már biztosan 17-tel nem osztható számot húznánk.
 e) Keressük meg, hány szám tartalmaz hármat: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43. Ez tehát 14 szám, így a 15. húzásra már biztosan olyan számot húznánk, ami nem tartalmaz hármat.
 f) Vizsgáljuk meg a legszerencsétlenebb esetet. Ez akkor következne be, ha először kihúznánk az első 25 számot, hiszen nem volna közöttük kettő olyan, amiknek az összege 50-nél nagyobb lenne. Ezután viszont bármelyik, kalapban maradt számot kihúzzuk, akkor a már kihúzottak között biztosan volna olyan, amivel párba állítva, az összegük nagyobb lenne, mint 50. Tehát 26 húzásra lenne szükség.

I-6-4.

Hangya Manci egy 6 cm oldalú, szabályos háromszög alakú pályán készült a hangyaolimpiára. Az edzője megtudta, hogy az olimpián ugyanilyen kerületű, téglalap alakú pályán futnak majd a versenyzők. Milyen méretei lehetnek az olimpiai pályának, ha az oldalai egész centiméter hosszúak? Keresd meg az összes lehetőséget!

Megoldás:

A szabályos háromszög kerülete $3 \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$. Ugyanennyi a téglalap kerülete is, így a két szomszédos oldal összege 9 cm. Ez az 1 x 8 cm-es, 2 x 7 cm-es, 3 x 6 cm-es és a 4 x 5 cm-es téglalapoknál igaz. Ennek a feladatnak tehát négy megoldása van.

I-6-5.

Egy fagyizóban 5-féle fagyit kapható: epres, citromos, vaníliás, csokis és áfonyás. Kati egy háromgombócos fagyit szeretne venni, amiben mindhárom gombóc íze különbözik. Mivel a csokis fagyit a kedvence, ezért azt mindenképpen kérni akar. Hányféleképpen kérhet Kati fagyilaltot a fagyizóban, ha a különböző ízű fagyilaltok sorrendjére is tekintettel volna? Sorold fel a lehetőségeket!

Megoldás:

Ha a csokis fagyit kéri elsőként, akkor $4 \cdot 3 = 12$ lehetőség van a másik két gombóc összeállítására. Ugyanez érvényes akkor is, ha a csokis volna a másodiknak, illetve a harmadiknak kért fagyit. Ez tehát összesen $3 \cdot 12 = 36$ lehetőséget jelent.

A lehetőségek:

cs-e-c, cs-e-v, cs-e-á, cs-c-e, cs-c-v, cs-c-á, cs-v-e, cs-v-c, cs-v-á, cs-á-e, cs-á-c, cs-á-v
 e-cs-c, e-cs-v, e-cs-á, c-cs-e, c-cs-v, c-cs-á, v-cs-e, v-cs-c, v-cs-á, á-cs-e, á-cs-c, á-cs-v
 c-e-cs, c-v-cs, c-á-cs, e-c-cs, e-v-cs, e-á-cs, v-e-cs, v-c-cs, v-á-cs, á-e-cs, á-c-cs, á-v-cs

VII–VIII–IX. OSZTÁLY

I-7-1.

Hány olyan négyjegyű természetes szám létezik, ami a 2025-höz hasonlóan pontosan két kettest és egy nullát tartalmaz?

Megoldás:

A két kettest és a nullát háromféleképpen tudjuk egymás mellé írni: 022, 202, 220.

Rajtuk kívül a keresett négyjegyű számok a nyolc további számjegy (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) valamelyikét tartalmazzák, ami négy különböző helyen állhat a négyjegyű számban.

- Ha az ezresek helyén szerepel az említett számjegyek közül valamelyik, akkor $8 \cdot 3 = 24$ szám képezhető.
- Ha a százask helyén szerepel a számjegy, akkor már csak $8 \cdot 2 = 16$ szám felel meg a feltételeknek, hiszen nullával nem kezdődhet a szám. Ugyanez a helyzet akkor is, amikor a számjegy a tízesek, ill. az egyesek helyén szerepel. Ez újabb $3 \cdot 16 = 48$ megoldást jelent.

Összesen $24 + 48 = 72$ olyan négyjegyű szám létezik, ami megfelel a feltételeknek.

I-7-2.

Adott az ABC háromszög. A háromszög egyik belső szögének nagysága fele akkora, mint a háromszög másik két belső szögének összege. Igaz még az is, hogy az egyik belső szög nagysága fele akkora, mint egy másik belső szög nagysága. Mekkora az ABC háromszög belső szögei?

Megoldás:

A háromszög belső szögeinek összege 180° . Jelöljük α -val azt a szöget, amely fele akkora, mint a másik két szög összege! Ekkor igaz, hogy $\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, amiből $\alpha = 60^\circ$, a másik két szög összege pedig 120° . Mindezek figyelembevételével kapjuk a feladat két megoldását:

α	β	γ
60°	30°	90°
60°	40°	80°

I-7-3.

A VII. osztályban az egyik szünet alatt betört egy ablak. A tanteremben csak 4 fiú – András, Laci, Karcsi és Tamás – tartózkodott, egyikük volt az elkövető. Az osztályfőnök a tettest kereste. Mindenkitől megkérdezte, hogy ki törte be az ablakot. A következő válaszokat kapta:

András: Laci volt.

Laci: Tamás tette.

Karcsi: Nem én voltam.

Tamás: Laci hazudik, ha azt mondja, hogy én tettem.

Ki volt a tettes, ha a 4 fiú közül pontosan egy mond igazat?

Megoldás:

Tételezzük fel, hogy András igazat mond, a többiek pedig hazudnak. Viszont így Karcsi állítása hazugság, ez esetben viszont ketten lennének a tettesek, ami nem lehetséges.

Tételezzük fel, hogy Laci mond igazat, tehát Tamás a tettes. Az előző esethez hasonlóan Karcsi állítása miatt most is ellentmondáshoz jutunk.

Ha Karcsi állítása igaz, akkor újra Tamás állításánál kerülünk ellentmondásba, mert ketten nem mondhattak igazat.

Mindezek után csak Tamás lehet az, aki igazat mondott. Mivel a többiek hazudtak, így Karcsi a tettes.

I-8-4.

Egy dobozban 468 db golyó van, mind egyszínű piros, zöld vagy sárga. Ha a dobozba betennénk még 13 sárga és 35 piros golyót, és kivennénk 24 zöld golyót, akkor a dobozban lévő piros, zöld és sárga golyók számának aránya 4:3:5 lenne. Hány piros, zöld, illetve sárga golyó van a dobozban?

Megoldás:

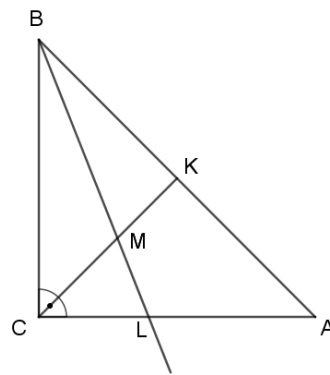
Ha az említett berakásokat és kivételeket elvégeznénk, akkor a dobozban összesen $468 + 13 + 35 - 24 = 492$ golyó lenne.

Ezek között a piros, zöld és sárga golyók számának aránya 4:3:5, azaz $\frac{4}{12}$ -e piros, $\frac{3}{12}$ -e zöld, és $\frac{5}{12}$ -e sárga. Tehát ekkor 164 piros, 123 zöld és 205 sárga golyó lenne a dobozban.

Így eredetileg $164 - 35 = 129$ piros, $123 + 24 = 147$ zöld, és $205 - 13 = 192$ sárga golyó van a dobozban.

I-89-5.

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a derékszög a C csúcsnál van. Berajzoltuk a háromszögbe a C csúcsból kiinduló magasságvonalat és a B csúcsból kiinduló belső szögfelezőt. A magasságvonal talppontja legyen K, a szögfelező és a CA oldal metszéspontja L. Jelöljük a két egyenes metszéspontját M-mel. Bizonyítsd be, hogy a CLM háromszög egyenlő szárú!



Megoldás:

Mivel az ABC háromszög egyenlő szárú, ezért a CK magasság felezi a C csúcsnál lévő derékszöget, így az MCL szög 45° -os.

A BCL háromszögben a CBL szög a szögfelező miatt $22,5^\circ$ -os, így a CLB szög nagysága $67,5^\circ$.

A CLM háromszögben a CLM szögre igaz: $|\text{CLM szög}| = 180^\circ - (45^\circ + 67,5^\circ) = 67,5^\circ$.

Mivel a CLM háromszögnek van két $67,5^\circ$ -os belső szöge, így ez a háromszög egyenlőszárú.

I-89-6.

Öt egymást követő természetes szám összege $\overline{1ab2c}$ alakú természetes szám, amiben a különböző betűk azonos számjegyeket is jelenthetnek. Melyik az az 5 természetes szám, amit ha összeadunk, akkor a lehető legnagyobb ilyen számot kapjuk?

Megoldás:

a) Legyen az 5 egymást követő természetes szám közül a középső x . Ekkor az 5 szám:

$(x - 2)$, $(x - 1)$, x , $(x + 1)$, $(x + 2)$.

Ezek összege $(x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) = 5x$, tehát az öt többszöröse. Az $\overline{1ab2c}$ alakú számok közül az 5 legnagyobb lehetséges többszöröse a 19925.

Ekkor a fenti jelöléssel $5x = 19925$, azaz $x = 3985$.

Tehát a keresett 5 szám, amelyek összegeként a 19925-öt kapjuk: 3983, 3984, 3985, 3986, 3987.

I-9-7.

A $3, -6, -2, \frac{1}{3}, \dots$ racionális számokból álló sorozatban a harmadik tag a második és az első hányadosa, a negyedik a harmadik és a második hányadosa, és így tovább.

a) Sorold fel a sorozat első tíz tagját!

b) Határozd meg a sorozat 2025. tagját!

c) Számítsd ki az első 2025 tag szorzatát!

Megoldás:

a) A sorozat 5. tagja $\frac{1}{3} : (-2) = -\frac{1}{6}$. A 6. tagja $-\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$. A 7. tagja $-\frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{6}\right) = 3$.

A 8. tagja $3 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$. A 9. tagja $-6 : 3 = -2$. A 10. tagja $-2 : (-6) = \frac{1}{3}$.

b) Észrevehető, hogy a sorozatban a 7. tag megegyezik az elsővel, és utána az első 6 tag ismétlődik.

Mivel $2025 = 337 \cdot 6 + 3$, ezért a 2025. tag megegyezik a harmadik taggal, azaz -2 .

c) Az első hat tag szorzata: $3 \cdot (-6) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, azaz az első 2022 tag szorzata is 1, így az első

2025 tag szorzata megegyezik az első három tag szorzatával: $3 \cdot (-6) \cdot (-2) = 36$.