

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

AZ II. FORDULÓ MEGOLDÁSAI

V–VI. OSZTÁLY

II-5-1.

Egy nagypapának öt unokája van: Anna, Béla, Csaba, Dani és Ernő. Anna idősebb, mint Csaba, Béla idősebb Ernőnél, Dani fiatalabb, mint Ernő, Csaba idősebb Bélánál. A legfiatalabb unoka 10 éves, az életkoruk összege 61. Hány évesek az egyes unokák?

Megoldás:

A unokák életkorának meghatározásához először állapítsuk meg a kor szerinti sorrendet:

- Anna idősebb, mint Csaba: $\text{Anna} > \text{Csaba}$
- Béla idősebb Ernőnél: $\text{Béla} > \text{Ernő}$
- Dani fiatalabb, mint Ernő: $\text{Ernő} > \text{Dani}$, vagyis $\text{Béla} > \text{Ernő} > \text{Dani}$
- Csaba idősebb Bélánál: $\text{Csaba} > \text{Béla}$

A teljes sorrendet összerakva a legidősebbtől a legfiatalabbig: $\text{Anna} > \text{Csaba} > \text{Béla} > \text{Ernő} > \text{Dani}$

Mivel öt különböző életkorról van szó, és a legfiatalabb unoka, Dani 10 éves.

Ha legfiatalabb 10 éves (Dani), a többiek életkora legalább 11, 12, 13, 14 év. Ez összesen 60 év. Mivel az életkoruk összege 61, az egyik életkort 1-gyel meg kell növelni, hogy az összeg 61 legyen, viszont a sorrendnek meg kell maradnia, így csak Anna életkorához adhatjuk az említett 1 évet. Így az unokák életkora a következő:

Anna: 15 éves

Csaba: 13 éves

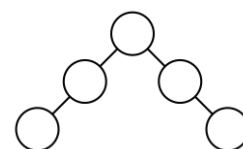
Béla: 12 éves

Ernő: 11 éves

Dani: 10 éves

II-5-2.

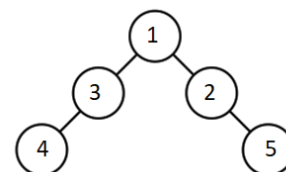
Helyezd el a körökben az 1, 2, 3, 4, 5 számokat úgy, hogy mindkét vonalon ugyanannyi legyen a számok összege! Keresd meg az összes megoldást!



Megoldás:

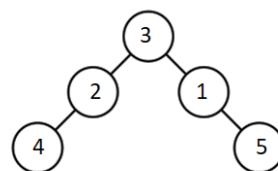
Az öt szám összege 15, ami páratlan szám. A legfelső körbe csak páratlan szám (1, 3, 5) kerülhet. Ekkor a további négy szám összege felosztható két egyenlő részre:

1. eset: Ha a legfelső körbe 1-et írunk, akkor a vonalakon lévő további két körbe írt számok összege $(15 - 1) : 2 = 7$ lesz, azaz $3 + 4$, illetve $2 + 5$:



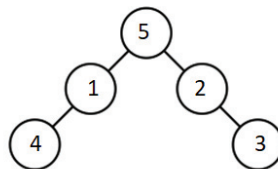
Megjegyzés: Ha a legfelső körben meghagyjuk az 1-et, akkor a további körökbe írt számok felcserélésével újabb 7 kitöltést kapunk.

2. eset: Ha a legfelső körbe 3-at írunk, akkor a vonalakon lévő további két körbe írt számok összege $(15 - 3) : 2 = 6$ lesz, azaz $2 + 4$, illetve $1 + 5$:



Megjegyzés: Ha a legfelső körben meghagyjuk a 3-at, akkor a további körökbe írt számok felcserélésével ez esetben is újabb 7 kitöltést kapunk.

3. eset: Ha a legfelső körbe 5-öt írunk, akkor a vonalakon lévő további két körbe írt számok összege $(15 - 5) : 2 = 5$ lesz, azaz $1 + 4$, illetve $2 + 3$:



Megjegyzés: Ha a legfelső körben meghagyjuk az 5-öt, akkor a további körökbe írt számok felcserélésével újabb 7 kitöltést kapunk.

A körökbe összesen 24 különböző módon írhatjuk be a megadott számokat.

II-56-3.

Okos Tóni és Cseles Csabi padtársak. Az egyik órán azt a feladatot kapták, hogy számozzák meg a 40 lapos füzeteket. Az első oldalra az egyes került, és minden következő oldalra az előzőtől eggyel nagyobb természetes számot írtak. Számozás közben Okos Tóni ceruzájának hegye kitörött az egyik páratlan szám leírásának végén. Amíg a ceruzáját faragta, Cseles Csabi Tóni füzetének következő üres oldalára ráírt egy számot. Tóni nem vette észre Csabi huncutságát, így innen folytatta a számozást. Végül az utolsó oldalra a 86 került, így a végén szembesült a turpissággal. Csabihoz fordult és ezt mondta: „Megtréfáltál Csabi, de én tudom, hogy melyik oldalszámok hiányoznak a füzetemből, mert emlékszek rá, hogy a ceruzahegy kitöréséig pontosan 105 számjegyet írtam le.” Melyik számok hiányoznak Tóni füzetéből, ha a számozás közben egyszer sem tévesztett?

Megoldás:

Okos Tóni füzete 40 lapos, ami azt jelenti, hogy 80 oldala van. Ha az első oldaltól kezdve számozza a füzetet, akkor az utolsó oldalra a 80-as számnak kellene kerülnie. Ehelyett a 86-os szám került rá, ami azt jelenti, hogy 6 számmal többet írtak a füzetbe a kelleténél, vagyis 6 oldalszám hiányzik a számozásból a füzetben lévő fizikai oldalakhoz képest.

A feladat szerint Cseles Csabi egyetlen számot írt be Tóni füzetébe, Tóni pedig innen folytatta a számozást. Mivel összesen 6 számmal lett több a végén a 80-asnál $(86 - 80 = 6)$, ez azt jelenti, hogy a hiányzó oldalak számainak összege 6-tal kell, hogy kevesebb legyen, mint a beírt számok összege. A feladat szövege alapján valószínűbb, hogy maga a sorszám ugrott egyet, így 6 szám „tűnt el” a sorból. Ez a hat szám hiányzik Tóni füzetéből.

Tóni emlékszik, hogy a ceruza hegyének kitöréséig pontosan 105 számjegyet írt le. Ebből a számból tudjuk meghatározni, melyik oldalon történt a hiba:

- Az 1-től 9-ig terjedő egyjegyű számok száma: 9 szám (9 számjegy).
- A 10-től 49-ig terjedő kétjegyű számok száma: 40 szám (80 számjegy).
- Még fennmaradt $105 - (9 + 80) = 16$ számjegy, ami az 50-től 57-ig történő megszámozáshoz szükséges.

Tehát Tóni az 57-es oldalszám leírásának végén (ami egy páratlan szám volt, ahogy a feladat állítja) hagyta abba a munkát a ceruza törése miatt. Cseles Csabi a következő üres oldalra írt egy számot. Ez az oldal valószínűleg az 58. sorszámú oldal lett volna, de a beavatkozás miatt a sorszámozás elcsúszott.

Vagyis a számozásból a következő számok hiányoztak: 58, 59, 60, 61, 62, 63.

II-6-4.

Karcsi, Géza és Tamás magasugrásban, futásban, illetve asztaliteniszből versenyzett. Mindegyikük nyert vagy aranyérmét, vagy ezüstérmét, vagy bronzérmét.

- Az asztaliteniszező, aki Karcsi barátja, bronzérmét nyert.
- A magasugró nem kapott aranyérmét.
- Tamás nem atletizál.
- Karcsi nem magasugró.

Állapítsd meg, hogy milyen színű érmet nyertek a fiúk!

Megoldás:

Az első állítás miatt Karcsi nem asztaliteniszező és arany-, vagy ezüstérmet nyert.

Mivel Tamás nem atletizál (tehát nem magasugró, ill. futó), így biztosan ő az asztaliteniszező, aki bronzot nyert.

A 4. állítás szerint Karcsi nem magasugró, így ő a futó. A magasugró tehát csakis Géza lehetett, aki a 2. állításból kifolyólag ezüstöt nyert, az arany pedig Karcsi nyakába lett akasztva.

A fentiek alapján összegezhethetjük, hogy Karcsi futó, és aranyérmes lett. Géza magasugró, aki ezüstöt szerzett, Tamás pedig az asztaliteniszező, aki bronzot vitt haza.

II-6-5.

A tornateremben eldobtunk 2025 darab szabályos dobókockát. (Egy szabályos dobókockán a szemközti lapokon szereplő számok összege 7.) Ha összeadjuk a kockákon felül látható számokat, akkor a legnagyobb négyjegyű számot kapjuk. Mennyi az összege azoknak a számoknak, amelyek a padlóval érintkeznek?

Megoldás:

A legnagyobb négyjegyű szám a 9 999.

A szabályos dobókocka egymással szemközti lapjain szereplő számok összege 7.

A 2025 darab dobókocka felső lapjain, valamint a padlóval érintkező, alsó lapjain található számok összege: $2025 \cdot 7 = 14\,175$. Ha ebből kivonjuk a felül látható számok összegét, akkor megkapjuk a padlóval érintkező számok összegét: $14\,175 - 9\,999 = 4\,176$.

A padlóval érintkező számok összege 4 176.

VII-VIII-IX. OSZTÁLY

II-7-1.

A tornateremben eldobtunk 2025 darab szabályos dobókockát. (Egy szabályos dobókockán a szemközti lapokon szereplő számok összege 7.) Ha összeadjuk a kockákon felül látható számokat, akkor a legkisebb ötjegyű számot kapjuk. Mennyi az összege azoknak a számoknak, amelyek a padlóval érintkeznek? Legfeljebb hány hatos érintkezhet ekkor a padlóval?

Megoldás:

A legkisebb ötjegyű szám a 10 000.

A 2025 darab dobókocka felső lapjain, valamint a padlóval érintkező, alsó lapjain található számok összege: $2025 \cdot 7 = 14\,175$. Ha ebből kivonjuk a 10 000-et, akkor megkapjuk a padlóval érintkező számok összegét: $14\,175 - 10\,000 = 4\,175$.

A padlóval akkor érintkezik a legtöbb hatos, ha a többi kockánál a lehető legtöbb egyes lesz alul. Tegyük fel, hogy a padlóval n darab hatos és $(2025 - n)$ darab egyes érintkezik. Ekkor felírható a következő egyenlet:

$$6 \cdot n + 1 \cdot (2025 - n) = 4\,175 \Rightarrow 6 \cdot n + 2025 - n = 4\,175 \Rightarrow 5 \cdot n = 2\,150 \Rightarrow n = 430$$

A padlóval legfeljebb 430 hatos érintkezhet.

Másféleképpen: A hatosok és egyesek számának, illetve az összegük alakulását táblázatba foglalhatjuk:

Hatosok száma	Egyesek szám	A padlóval érintkező számok összege
0	2025	2025
1	2024	2030
2	2023	2035
3	2022	2040
...	...	...
n	$2025 - n$	4175

Az összegek alakulásából látható, hogy ha a hatosok számát eggyel növelem (az egyesek számát pedig eggyel csökkentem), akkor az összeg 5-tel nő. Mivel a padlóval érintkező számok összege 4175, ezért a táblázat segítségével meghatározható a hatosok száma: $(4175 - 2025) : 5 = 430$.

II-7-2.

Okos Tóni lemérte egy kocka összes élének hosszát, összeadta őket, így összegként 48 cm-t kapott. Tóninak összesen 8 ugyanilyen kockája volt. Ezek felhasználásával különböző téglatesteket épített úgy, hogy mind a 8 db kockáját felhasználta egy-egy téglatesthez. Minden egyes téglatest esetén lemérte és összeadta az összes él hosszát, majd az így kapott értéket felírta a táblára. Mekkora lehetett a legnagyobb és a legkisebb szám, ami a táblára kerülhetett?

Megoldás:

Egy kockának 12 egyenlő hosszú éle van.

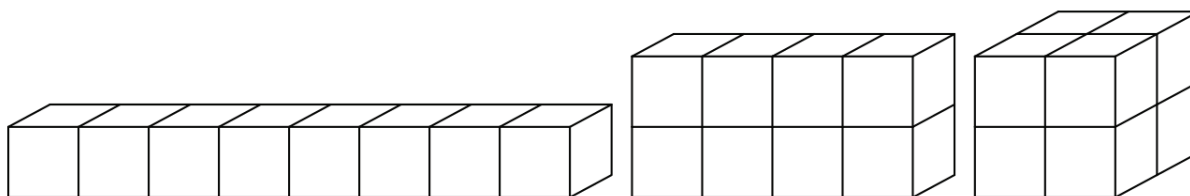
Ha ezek hosszának összege 48 cm, akkor egy él hossza $48 \text{ cm} : 12 = 4 \text{ cm}$.

Nyolc egyforma kockából 3-féle különböző téglatest rakható össze.

Az első fajtánál az egyik él mentén 1, a másik mentén is 1, a harmadik mentén 8 kocka található.

A második fajtánál az egyik él mentén 1, a másik mentén 2, a harmadik mentén 4 kocka található.

A harmadik fajtánál mindhárom él mentén 2-2 kocka található.



Mivel a kocka éle 4 cm hosszú, így az összerakott téglatestek élének hossza:

Az első fajtánál, 4 cm, 4 cm és 32 cm.

A második fajtánál 4 cm, 8 cm és 16 cm.

A harmadik fajtánál 8 cm, 8 cm és 8 cm.

A téglatestek összes élének hossza összesen (mindhárom fajta élből 4-4 db van):

Az első fajtánál: $4 \cdot (4 + 4 + 32) = 4 \cdot 40 = 160 \text{ (cm)}$

A második fajtánál: $4 \cdot (4 + 8 + 16) = 4 \cdot 28 = 112 \text{ (cm)}$.

A harmadik fajtánál: $4 \cdot (8 + 8 + 8) = 4 \cdot 24 = 96 \text{ (cm)}$.

Ezek közül a legnagyobb a 160 cm, így ez a legnagyobb szám, ami a papírlapra kerülhetett.

A felsoroltak közül a legkisebb hossz a 96 cm, így ez a legkisebb szám, ami a papírlapra kerülhetett.

II-78-3.

Két természetes szám összege eggyel kisebb a 2025-nél. Ha az egyik szám végéről elhagyjuk a nullát, akkor a másik számot kapjuk. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

A kisebbik természetes számot jelöljük x -szel.

A nagyobbik természetes szám nullára végződik, ezért biztosan a 10 és a kisebbik szám többszöröse. A feltételekből felírható az $x + 10x = 2025 - 1$ egyenlet, azaz $11x = 2024$. Ebből meghatározható a kisebbik szám: $x = 2024 : 11 = 184$.

A keresett két szám tehát a 184 és az 1840.

II-89-4.

Egy derékszögű trapéz egyik szára és az egyik alapja is 10 cm, a trapéz másik szára 20 cm hosszú. Mekkora a trapéz belső szögei?

Megoldás:

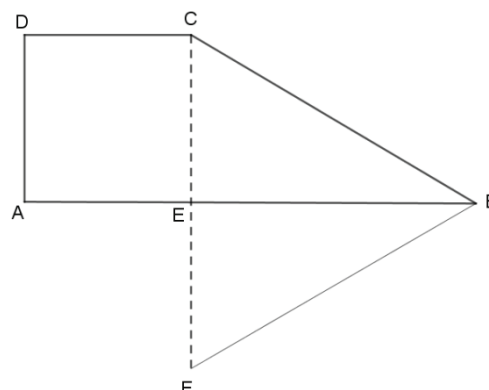
A trapézt nevezzük el ABCD trapéznek (ábra). Ekkor $|AD| = |DC| = 10 \text{ cm}$ és $|BC| = 20 \text{ cm}$, valamint a derékszögű trapéz tulajdonságaiból adódik, hogy $|\angle BAD| = |\angle CDA| = 90^\circ$.

Ha tükrözzük a C pontot az AB egyenes szerint, akkor megkapjuk az F pontot. Mivel $|CE| = |AD| = 10$ cm, ezért $|CF| = 20$ cm. A szimmetria miatt $|BC| = |BF|$, ezért a BCF háromszög szabályos, hiszen mindhárom oldala 20 cm hosszú. A szabályos háromszögek belső szögei 60° -osak.

Mivel $|\angle FCB| = 60^\circ$, ezért $|\angle DCB| = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

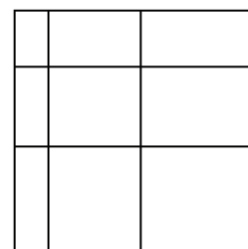
Szintén a tengelyes szimmetria miatt $|\angle ABC| = 30^\circ$.

A trapéz belső szögeinek nagysága: $30^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 150^\circ$.



II-89-5.

Egy négyzet oldalhossza 2025 egység. A négyzetet az oldalakkal párhuzamos vágásokkal kilenc téglalapra bontottuk fel az ábrán látható módon. A téglalapok kerületei egész számok, melyeket ha nagyság szerint növekvő sorrendbe rakunk, akkor 9 egymást követő pozitív egész számot kapunk. Mekkora a kerülete a legnagyobb téglalapnak a 9 közül?



Megoldás:

Jelöljük a téglalapok oldalainak hosszát x, y, z -vel, illetve a, b, c -vel az ábrán látható módon! Három olyan téglalap van, aminek van x hosszúságú oldala. Ez összesen 6 db x hosszúságú oldal. Hasonlóan mindegyik oldalhosszból 6-6 darab van a 9 téglalapban. Így az összes kisebb téglalap kerületének összeszámolásakor mindegyik oldalhosszt 6-6-szor számoljuk.

Azaz a 9 kerület összege:

$$6x + 6y + 6z + 6a + 6b + 6c = 6 \cdot (x + y + z) + 6 \cdot (a + b + c) = 12 \cdot 2025 = 24\,300$$

A kilenc kerület kilenc egymást követő egész szám, ezeket felírhatjuk a következő formában:

$$m - 4, m - 3, m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4$$

Azaz a 9 kerület összege:

$$m - 4 + m - 3 + m - 2 + m - 1 + m + m + 1 + m + 2 + m + 3 + m + 4 = 9 \cdot m = 24\,300.$$

$$\text{Azaz } m = 24\,300 : 9 = 2700, \text{ a legnagyobb kerület pedig } m + 4 = 2700 + 4 = 2704.$$

Tehát a legnagyobb téglalap kerülete 2704 egység.

x	y	z	a
			b
			c

II-9-7.

Összeadunk 2024 darab egymást követő egész számot.

a) Osztható-e az összegük 2024-tel?

b) Osztható-e az összegük 2025-tel?

Megoldás:

a) Ha a egy tetszőleges egész szám, akkor az egymást követő 2024 darab egész szám legyen

$$a - 1011, a - 1010, \dots, a - 1, a, a + 1, \dots, a + 1010, a + 1011, a + 1012.$$

Az összegük:

$$(a - 1011) + (a - 1010) + \dots + (a - 1) + a + (a + 1) + \dots + (a + 1010) + (a + 1011) + (a + 1012) = 2024 \cdot a + 1012$$

Ebből látszik, hogy az összeg nem osztható 2024-gyel.

b) A második kérdésre lehet a válasz igen is. Ehhez elég egyetlen példát adni: Ha $a = 1012$, akkor az összeg $2024 \cdot 1012 + 1012 = 2025 \cdot 1012$.