

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

A III. FORDULÓ MEGOLDÁSAI

V-VI. OSZTÁLY

III-5-1.



Okos Tóni többször lerajzolta a füzetébe az ábrán látható 5 kis négyzetből álló alakzatot, minden esetben ugyanúgy. Ezután minden alakzatban 2 kis négyzetet pirosra festett úgy, hogy nem keletkezett két egyforma rajz. Mennyi lehetett a legtöbb alakzat, amit Okos Tóni a füzetébe lerajzolt? Rajzold le az összes kiszínezett alakzatot!

Megoldás:

Megszámozzuk a négyzeteket az ábrán látható módon.



Ha az 1-es számút pirosra színezzük, akkor a másik piros négyféle lehet, ez négyféle rajz.



Ezután már csak azokat a rajzokat nézzük, ahol az 1-es négyzet nem piros.

Ha a 2-es számút pirosra színezzük, akkor a másik piros háromféle lehet (mert az 1-es nem lehet az), ez háromféle rajz.



Ezután már csak azokat a rajzokat nézzük, ahol sem az 1-es sem a 2-es nem piros.

Ha a 3-as számút pirosra színezzük, akkor a másik piros kétféle lehet, ez két rajz.



Van még egy olyan rajz, ahol sem az 1-es, sem a 2-es sem a 3-as mezőt nem festjük pirosra.



Tehát összesen a lerajzolt 10-féle rajz lehetséges. Tehát Donát legfeljebb 10 darab alakzatot rajzolhatott a füzetébe.

III-56-2.

A HINTA szó minden betűjének megfeleltetünk egy-egy számot, különböző betűk különböző számokat jelölnek. Tudjuk, hogy igazak a következő egyenlőségek: $H + I + N + T + A = 111$, $H + I = 44$, $I + N = 32$, $N + T = 42$, $T + A = 48$. Melyik betű milyen számot jelöl?

Megoldás:

A $H + I + N + T + A = 111$ egyenlőségbe beírjuk a $H + I$ helyére a 44-et, a $N + T$ helyére a 42-t.

$44 + 42 + A = 111$, azaz $86 + A = 111$, $A = 111 - 86 = 25$.

$T + A = 48$, azaz $T + 25 = 48$, $T = 48 - 25 = 23$.

$N + T = 42$, azaz $N + 23 = 42$, $N = 42 - 23 = 19$.

$I + N = 32$, azaz $I + 19 = 32$, $I = 32 - 19 = 13$.

$H + I = 44$, azaz $H + 13 = 44$, $H = 44 - 13 = 31$.

Tehát a betűk a következő számoknak felelnek meg: $H = 31$, $I = 13$, $N = 19$, $T = 23$, $A = 25$.

III-56-3.

Egy téglalap oldalai 24 cm és 32 cm hosszúak. Az egyik oldalát kétszer annyival változtattuk meg, mint a másikat, és ekkor egy négyzetet kaptunk. Mekkora a négyzet kerülete?

Megoldás:

A feladatban nem szerepel, hogy az oldalak megrövidítéséről, vagy az oldalak meghosszabbításáról van-e szó. Így 2 eset lehetséges:

1. eset: A négyzet oldalai egyenlők. A rövidebbik oldalhoz kell adni a kétszerest.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$24 + 2x$	26	28	30	32	34	36	38	40
$32 + x$	33	34	35	36	37	38	39	40

A négyzet oldalai 40 cm hosszúak, ezért a kerülete $4 \cdot 40 \text{ cm} = 160 \text{ cm}$.

2. eset: A hosszabbik oldalból kell kivonni a kétszerest.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$24 - x$	23	22	21	20	19	18	17	16
$32 - 2x$	30	28	26	24	22	20	18	16

A négyzet oldalai 16 cm hosszúak, ezért a kerülete $4 \cdot 16 \text{ cm} = 64 \text{ cm}$.

III-6-4.

Mobilisztánban minden telefonszám tízjegyű, valamint négy kettessel kezdődik. Hány olyan telefonszám van Mobilisztánban, amely tartalmazza a 2025-öt? Csak azok a telefonszámok felelnek meg a feltételnek, amelyekben a 2025 számjegyei között nem szerepel más számjegy. Megfelelő telefonszám pl. az 2222202536, viszont nem felel meg a feltételnek az 2222202152.

Megoldás:

A feladat feltételeinek az 22222025**, 2222*2025*, 2222**2025, 2222025*** alakú számok felelnek meg.

Az első három telefonszámtípusban a *-ok helyébe minden esetben tízféle számjegy írható, így mindegyik alakhoz $10 \cdot 10 = 100$ megoldás tartozik. Így az első három esetben a megoldások száma $3 \cdot 100 = 300$.

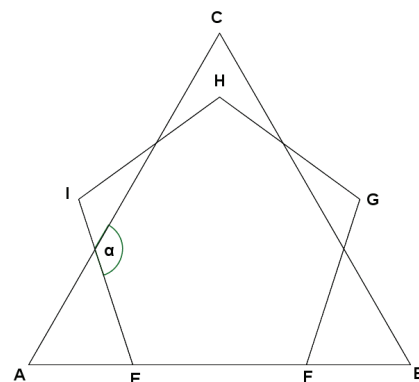
A negyedik esetben az utolsó három számjegy bármilyen lehet, így ekkor $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ lehetőség van.

Mobilisztánban összesen 1300 olyan, a feltételeknek megfelelő telefonszám van, ami tartalmazza a 2025-öt.

VII-VIII-IX. OSZTÁLY

III-7-1.

Az ábrán az ABC szabályos háromszög és az EFGHI szabályos ötszög látható. Határozd meg az α szög nagyságát!

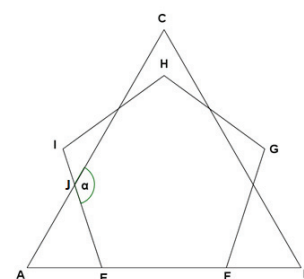
Megoldás:

Az ABC háromszög szabályos, ezért minden belső szöge 60° -os.

Jelölje n a szabályos sokszög belső szögeinek számát. Ekkor a szabályos sokszög egyik belső szögének nagysága $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$. Az EFGHI szabályos ötszög egyik belső szögének nagysága: $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

Az α szög csúcsát jelöljük meg J-vel (III/1. ábra). Az AEJ háromszögben az AEJ szög az ötszög IEF belső szögének mellékszöge, ezért érvényes: $|\angle AEJ| = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. A JAE szög az ABC szabályos háromszög belső szöge, ezért 60° -os.

Mivel az α szög az AEJ háromszög J csúcsánál lévő külső szög, ezért érvényes: $\alpha = |\angle AEJ| + |\angle JAE| = 72^\circ + 60^\circ = 132^\circ$.



III/1. ábra

III-7-2.

Okos Tóni ezt mondja Cseles Csabinak:

– Egy 3×3 -as négyzetrács négyzeteibe beírtam a számjegyeket egytől kilencig. Mindegyiket pontosan egyszer. Találd ki, melyik számjegy került a középső négyzetbe, ha a bal szélső oszlopban található számjegyek szorzata 18, a legfelső sorban lévők 105, a legalsó sorban lévők pedig 432.

Csabi rövid gondolkodás után így szól Tónihoz:

– Ezekből az adatokból ezt a feladatot nem lehet egyértelműen megoldani.

Tóni megadott még egy segítséget:

– A jobb oldali oszlopban található számjegyek szorzata 252.

– Oh, így már teljesen egyértelmű a megoldás. – mondta Csabi.

Melyik számjegy áll a középső négyzetben?

Megoldás:

A feladat szövege alapján megnevezhetjük az oszlopokat A, B, C betűkkel a sorokat pedig 1, 2, 3 számokkal:

	A	B	C	
1				105
2				
3				432
	18	252		

Írjuk fel a feltételek szerint, szorzat alakban a feladat első részében szereplő számokat:

$$18 = 1 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 6$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$432 = 6 \cdot 8 \cdot 9$$

A szorzat alakban ugyan ismétlődnek a tényezők, de a 18 kétféle felbontása miatt a tényezők helye nem határozható meg egyértelműen a négyzetrácsban.

A 252 felbontása: $252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$.

A 7-es a 105 és a 252 felbontásában is szerepel, így az biztosan a C1-es mezőben szerepel.

	A	B	C	
1			7	105
2				
3				432
	18		252	

A 9-es a 252 és a 432 felbontásában is szerepel, így az a C3 mezőbe kerül, így a C oszlop teljesen kitölthető:

	A	B	C	
1			7	105
2			4	
3			9	432
	18		252	

A 105 és a 18 felbontásából következik, hogy az A1-es mezőbe a 3-as kerül, amiből a 432 és a 18 felbontása miatt következik, hogy az A3 mezőbe pedig a 6-os. Így az A oszlop szintén kitölthető:

	A	B	C	
1	3		7	105
2	1		4	
3	6		9	432
	18		252	

A B1 és B3 mezőkbe beírhatjuk a kimaradt tényezőket:

	A	B	C	
1	3	5	7	105
2	1		4	
3	6	8	9	432
	18		252	

A középső négyzetbe az eddig fel nem használt 2-es kerül.

III-78-3.

Mobilisztánban minden telefonszám tízjegyű, valamint négy egyessel, vagy négy kettessel kezdődik. Hány olyan telefonszám van Mobilisztánban, amely tartalmazza a 2025-öt? Csak azok a telefonszámok felelnek meg a feltételnek, amelyekben a 2025 számjegyei között nem szerepel más számjegy. Megfelelő telefonszám pl. az 1111202536, viszont nem felel meg a feltételnek az 1111202152.

Megoldás:

Ha a telefonszámok 4 egyessel kezdődnek, akkor a feladat feltételeinek az 11112025**, 1111*2025*, 1111**2025 alakú számok felelnek meg.

Az első három telefonszámtípusban a *-ok helyébe minden esetben tízféle számjegy írható, így mindegyik alakhoz $10 \cdot 10 = 100$ megoldás tartozik. Így az első három esetben a megoldások száma $3 \cdot 100 = 300$.

Ha a telefonszámok 4 kettessel kezdődnek, akkor a feladat feltételeinek az 22222025**, 2222*2025*, 2222**2025, 2222025*** alakú számok felelnek meg.

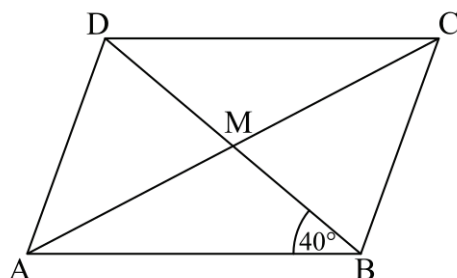
Az első három esetben az előzőek alapján a megoldások száma $3 \cdot 100 = 300$.

A negyedik esetben az utolsó három számjegy bármilyen lehet, így ekkor $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ lehetőség van.

Mobilisztánban összesen $300 + 1300 = 1600$ olyan, a feltételeknek megfelelő telefonszám van, ami tartalmazza a 2025-öt.

III-8-4.

Az ABC háromszögben M az AC oldal felezőpontja, a BM szakasz hossza fele az AB szakasz hosszának, az ABM szög nagysága 40° . Mekkora az ABC szög?

Megoldás:

III/2. ábra

Tükrözzük az ABC háromszöget középpontosan az M pont szerint, B tükörképe legyen D (III/2. ábra). A tükrözés miatt $|DB| = 2 \cdot |BM|$, továbbá a feladat szerint $|AB| = 2 \cdot |BM|$, így $|AB| = |DB|$.

Így az ABD háromszög egyenlő szárú.

Ebben az alapon fekvő DAB szög nagysága: $|DAB\angle| = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

A tükrözés miatt az ABCD négyszög paralelogramma, amelyben a szomszédos csúcsoknál lévő szögek összege 180° . Így $|ABC\angle| = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

III-89-5.

Egy ember pénzt örökölt. Elhatározta, hogy a pénzt beteszi a bankba kamatozni. Miután megvizsgálta a bankok kínálatát, a pénzének harmadát 4 %-os, negyedét 3 %-os éves kamatláb mellett kamatoztatta. Egy év elteltével kiszámította, hogy a bankba betett pénze eddig 500 eurót kamatozott. Összesen hány euró volt az örökség?

Megoldás:

Legyen az örökség x euró.

A feladat szövegéből ekkor felírható: $\frac{1}{3}x \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{4}x \cdot \frac{3}{100} = 500$, amiből $\frac{25}{1200}x = 500$, így $x = 24\,000$.

Az örökség 24 000 euró volt.

III-9-6.

Az ABCD paralelogramma AD és CD oldalára kívülré megrajzoljuk az AEFD és DKNC négyzeteket.

a) Igazold, hogy $|EB| = |NB|$!

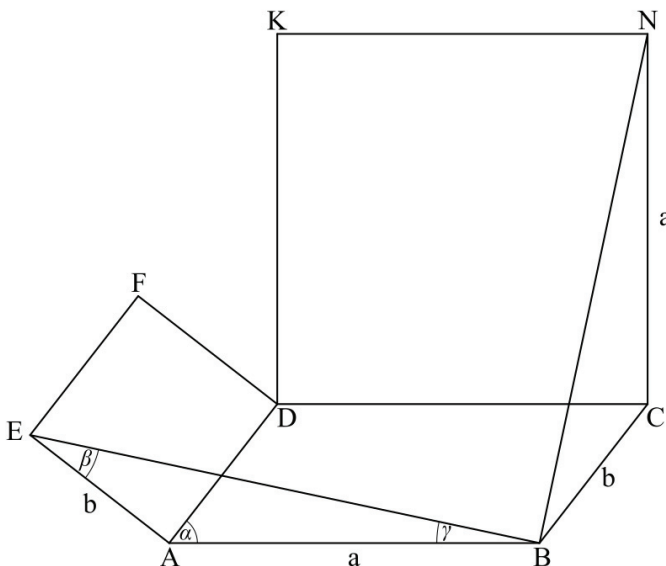
b) Mekkora szöget zárnak be az EB és NB szakaszok?

Megoldás:

a) Legyen $\angle DAB = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, $\angle ABE = \gamma$!

(III/3. ábra)

A paralelogramma és a négyzet tulajdonságaiból:
 $|EA| = |AD| = |BC|$, $|AB| = |DC| = |CN|$, $|\angle EAB| = 90^\circ + \alpha = |\angle BCN|$. Azaz az EAB és BCN háromszögekben két-két oldal hossza és az általuk közbezárt szög megegyezik. Így ez a két háromszög egybevágó. Ekkor $|EB| = |NB|$, amit bizonyítani kellett.



A paralelogramma ugyanazon oldalára illeszkedő szögeire igaz, hogy $|\angle CBA| = 180^\circ - \alpha$.

Az EAB háromszögben $180^\circ = |\angle EAB| + \beta + \gamma = 90^\circ + \alpha + \beta + \gamma$, amiből $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Mivel az EAB és BCN háromszögek egybevágóak, így $|\angle NBC| = \beta$.

$|\angle NBE| = |\angle CBA| - \beta - \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Azaz EB és NB merőlegesek egymásra.

III-9-7.

Határozd meg az összes olyan n egész számot, amelyre az $\frac{n^2+3}{n-2}$ tört értéke egész szám!

Megoldás:

Alakítsuk át a törtkifejezést:

$$\frac{n^2+3}{n-2} = \frac{n^2-4+7}{n-2} = \frac{n^2-4}{n-2} + \frac{7}{n-2} = \frac{(n-2) \cdot (n+2)}{n-2} + \frac{7}{n-2} = n + 2 + \frac{7}{n-2}.$$

A kifejezés értéke akkor lesz egész szám, ha $n - 2$ értéke a 7 osztója, azaz $n - 2 = -7; -1; 1; 7$.

Ebből az n a következő értékeket veheti fel: $-5; 1; 3; 9$.