

KATEDRA MATEMATIKAVERSENY

A IV. FORDULÓ MEGOLDÁSAI

V. OSZTÁLY

IV-5-1.

a	1		b	1	0	c	4
d	3	e	1	3			0
f	4	0			g	7	2
		h	9	4	9		
i	1	6		j	2	2	

IV-5-2.

vízszintes b) Egy könyv megszámozásához 204 számjegyet használtak fel. Milyen szám áll a könyv utolsó oldalán, ha a számozás az egyessel kezdődik?

Megoldás:

Az első 9 oldal megszámozásához 9 számjegyre van szükség.

A kétjegyű számokat tartalmazó oldalak (10 – 99) megszámozásához $90 \cdot 2 = 180$ számjegyre van szükség.

A további oldalak megszámozásához még $204 - (9 + 180) = 15$ számjegyet használtak fel. Ez $15 : 3 = 5$ háromjegyű számot jelent: 100, 101, 102, 103, 104.

A könyv utolsó oldalán a 104 áll.

IV-5-3.

függőleges c) Okos Tóni lemérte az ABC háromszög oldalainak hosszát, majd az oldalakat páronként összeadta. A következő eredményeket kapta: 209 mm, 272 mm és 323 mm. Hány mm az ABC háromszög kerülete?

Megoldás:

Nevezzük el a háromszög oldalait a -val, b -vel és c -vel!

Ekkor: $a + b = 209$ cm, $a + c = 272$ cm, $b + c = 323$ cm, amiből $2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c = 804$ cm.

A háromszög kerülete: $k = a + b + c = 804 \text{ cm} : 2 = 402 \text{ cm}$.

VI. OSZTÁLY

IV-6-1.

a	2		b	3	c	4	1
d	1	e	5			0	
		f	2	g	0	5	h
i	5	5	0				9
	1		j	1	6	0	

IV-6-2.

vízszintes j) Egy hat egység élű fakockát feketére festünk, majd feldaraboljuk 1 egység élű kockákra. Hány olyan kis kockát kapunk, aminek legfeljebb 1 lapja lesz fekete?

Megoldás:

Hat egység élű kockából $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ egységnyi élű kis kockát tudunk darabolással csinálni.

Legfeljebb egy lapja azoknak a kis kockáknak lesz fekete, amiknek egy sem, vagy pontosan egy lapjuk fekete.

Egy lapja sem lesz fekete a nagy kocka belsejében lévő $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ kis kockának.

A nagy kocka minden lapjához $4 \cdot 4 = 16$ olyan kis kocka illeszkedik, aminek pontosan egy lapja lesz fekete. A nagy kockának 6 lapja van, így összesen $6 \cdot 16 = 96$ ilyen kis kocka van.

Ezek után $64 + 96 = 160$ olyan kis kockát kapunk a daraboláskor, aminek legfeljebb 1 lapja lesz fekete.

IV-6-3.

függőleges h) Egy kerékpár kereke 1 másodperc alatt ötöt fordul, és 5 perc alatt 3 km-t tesz meg. Hányszor fordul körbe a kerék, mialatt a kerékpár 580 m-t tett meg?

Megoldás:

Ha a kerékpár kereke 1 másodperc alatt ötöt fordul, akkor 5 perc (300 másodperc) alatt $300 \cdot 5 = 1500$ fordulat történik.

Mivel $3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$, így 1 fordulattal a kerék 2 m-t tesz meg.

A kerék 580 m megtétele során $580 : 2 = 290$ fordulatot tesz meg.

VII. OSZTÁLY

IV-7-1.

a	2	b	4		c	1	2	d	1
e	4	5	f	5	6				1
	0		g	1	5	h	1		0
		i	2	4		9			
j	9	8	7	k	6	2	4		
m	4	8			4				2

IV-7-2.

vízszintes c) Egy dobozban azonos méretű építőkockák vannak, összesen 294 darab. Van közöttük piros, fehér és zöld színű. Legalább 217 kockát kell közülük taláломra kiválasztani ahhoz, hogy biztosan legyen a kiválasztottak között zöld, és legalább 200-at kell közülük taláломra kiválasztani, hogy biztosan legyen a kiválasztottak között piros kocka. Hány fehér kocka van a dobozban?

Megoldás:

Legyen p a piros, f a fehér és z a zöld kockák száma. Ekkor $p + f + z = 294$

Legalább 217 kockát kell közülük taláломra kiválasztani ahhoz, hogy biztosan legyen a kiválasztottak között zöld, így a piros és fehér kockák számának összege $p + f = 217 - 1 = 216$.

Hasonlóan $f + z = 199$.

Mivel $p + 2 \cdot f + z = 216 + 199 = 415$, ezért $f = 415 - 294 = 121$.

A dobozban tehát 121 fehér kocka van.

IV-7-3.

függőleges i) Huszonhét szabályos dobókockából egy nagy kockát építünk. Legfeljebb hány pötty lehet a nagy kocka felszínén? (A szabályos dobókocka egymással szemközti lapjain a számok összege 7.)

Megoldás:

Huszonhét dobókockából egy olyan nagy kocka rakható ki, aminek az élei mentén három dobókocka van.

A csúcsoknál található dobókockáknak 3 lapja látható, így azokon legfeljebb $6 + 5 + 4 = 15$ pötty lehet. Ez összesen $8 \cdot 15 = 120$ pötty.

A nagy kocka éleinek közepén a dobókockák két lapja látható, ezeken legfeljebb $6 + 5 = 11$ pötty lehet. Mivel a kockának 12 éle van, ezért ez újabb $12 \cdot 11 = 132$ pötty.

A nagy kocka lapjainak közepén található dobókockáknak csak egy lapja látható. Ezeken legfeljebb $6 \cdot 6 = 36$ pötty lehet.

A nagy kocka felszínén legfeljebb $120 + 132 + 36 = 288$ pötty lehet.

VIII. OSZTÁLY

IV-8-1.

a	b		c		d
3	5		5		1
e		f			
2	5	8	8	5	2
		g			
8		3	2		5
h	i		j		
8	1	6		2	
	k			l	
	1	0	2	7	8
m		n			
2	5	2	2	4	

IV-8-2.

vízszintes g) Csabiék iskolájában a fiúk 40 %-a, a lányok 28 %-a szereti a spenótot. Az iskola tanulóinak egy harmada fiú. Csabi iskolájában a tanulók hány százaléka szereti a spenótot?

Megoldás:

Az iskolába járó gyerekek számát jelöljük meg x -szel.

Az iskola tanulóinak egy harmada fiú, a 40 %-uk szereti a spenótot: $\frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{40}{100}$.

Az iskola tanulóinak két harmada lány, a 28 %-uk szereti a spenótot: $\frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{28}{100}$.

A spenótot szerető tanulók száma: $\frac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{40}{100} + \frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{28}{100} = \frac{96}{300} \cdot x = \frac{32}{100} \cdot x$.

A tanulók 32 %-a szereti a spenótot.

IV-8-3.

vízszintes h) Egy szabályos hatszög kerülete 408 mm. A hatszög mindegyik oldalára kifelé négyzetet rajzolunk úgy, hogy a négyzet egyik oldala megegyezik a hatszög oldalával. Hány mm annak a tizenkétszögnek a kerülete, amelyet a négyzetek hatszögtől különböző csúcsai határoznak meg?

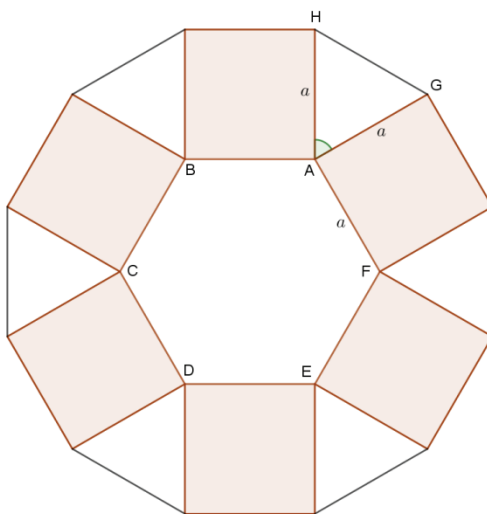
Megoldás:

Nevezzük el a szabályos hatszöget ABCDEF-nek, a tizenkétszög megszerkesztése után keletkezett háromszögek egyikét pedig AGH-nak! (IV/1. ábra)

A hatszög kerülete 408 mm, így mindegyik oldala $a = 408 \text{ mm} : 6 = 68 \text{ mm}$. A négyzetek oldalai szintén $a = 68 \text{ mm}$ hosszúak.

A hatszög belső szögeinek összege $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$, így mindegyik belső szöge $720^\circ : 6 = 120^\circ$ -os. Mivel a négyzet belső szögei derékszögek, azért a $\angle HAG = 360^\circ - (120^\circ + 2 \cdot 90^\circ) = 60^\circ$. Ebből következik, hogy az AGH háromszög szabályos, így $|GH| = 68 \text{ mm}$.

A tizenkétszög kerülete $12 \cdot a = 12 \cdot 68 \text{ mm} = 816 \text{ mm}$.



IV/1. ábra

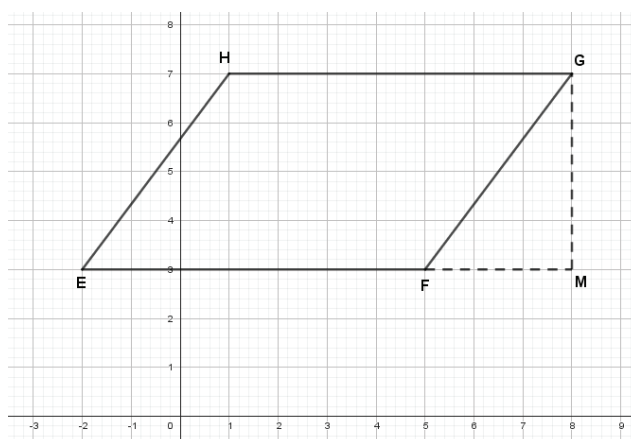
IX. OSZTÁLY

IV-9-1.

a	2	b	5		c	5	d	2	5	e	6
f	1	0	4	0	4						0
		8			5		g	6	7		
h	1	4	i	7		j	7	2	6		
	9		k	2	3	1	0				
m	8	n	2	9	1		o	5	p	2	
r	1	4		s	2	5	2	0			

IV-9-2.

függőleges d) Adottak az EFGH paralelogramma csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben: $E[-2;3]$, $F[5;3]$, $G[8;7]$, $H[1;7]$. Hány egységnyi a paralelogramma területe?



IV/2. ábra

Megoldás:

Szerkesszük meg a derékszögű koordináta-rendszerben az EFGH romboldot! (IV/2. ábra)

Ha felvesszük a koordináta-rendszerben az $M[8;3]$ pontot, akkor kapunk egy FMG derékszögű háromszöget, aminek az FM befogója 3 egység, az MG befogója pedig 4 egység hosszúságú. Pitagorasz-tételének felhasználásával megállapítható, hogy az FG átfogó hossza 5 egység.

Az FG átfogó egyben a rombold rövidebbik oldala.

A koordináta-rendszerből meghatározható a rombold hosszabbik oldala: $|EF| = 7$.

A rombold területe $k = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 24$ egység.

IV-9-3.

függőleges e) Mennyi a $(10^{2025} + 2) : 3$ művelet sor eredményében a számjegyek összege?

Megoldás:

A 10^{2025} hatvány értéke egy olyan 2026 jegyű szám, aminek az első számjegye egyes, amit 2025 darab nulla követ. Ha ehhez 2-t adunk, akkor az egyesek helyén álló 0 kettesre cserélődik: $\underbrace{1\,000\ldots000\,2}_{2024\,db}$.

Ha ezt a számot elosztjuk hárommal, akkor egy olyan számot kapunk, amiben az első 2024 helyen hármas, az egyesek helyén pedig egy négyes szerepel: $\underbrace{1\,000\ldots000\,2}_{2024\,db} : 3 = \underbrace{333\ldots3\,4}_{2024\,db}$.

A hányadosul kapott szám számjegyeinek összege $2024 \cdot 3 + 4 = 6076$.